

Basisband-Signale

Inhaltsverzeichnis

1	Digital-Übertragung im Basisband	1
1.1	Der Basisband-Kanal	1
1.2	Die Sender-Seite	1
1.3	Die Empfänger-Seite	2
1.3.1	Korrelations-Empfänger	3
1.3.2	Empfangs-Symbole durch weißes Rauschen gestört	5
1.3.3	Matched Filter Empfänger	7
1.3.4	Optimierung des Matched Filters	7
1.3.5	Fehler-Raten bei binärer Datenübertragung (Störung durch weißes Gauß'sches Rauschen)	8
1.3.6	Entscheider-Schwelle und Bitfehler-Wahrscheinlichkeit	9
1.3.7	Gauß'sche Fehlerfunktion und Q -Funktion	11
1.3.8	Bit-Fehler-Rate	12
1.3.9	Der Q -Faktor	13
1.3.10	Bipolare Datenübertragung	13
1.3.11	Unipolare Datenübertragung	13
1.3.12	Die Fehlerwahrscheinlichkeit P_B ist unabhängig von der Form der Symbole.	13
2	Datenformate für Basisband-Übertragung	14
3	Spektren Digitaler Signale	15
3.1	Daten mit statistischer Unabhängigkeit	16
3.2	Beispiele für Daten mit statistischer Abhängigkeit	16
3.2.1	Die Biphase-Level Codierung	17
4	Partial-Response-Verfahren	18
4.1	Duobinary-Codierung	19
4.1.1	Der Gleichanteil	19
4.1.2	Codierung und Decodierung	20
4.1.3	Pre-Codierung	20
4.2	Pseudo-Ternär-Codierung	21

Abbildungsverzeichnis

1.1	Blockschaltbild des I/Q Basisband-Kanals	1
1.2	Modell der Sender-Seite einer binären Datenübertragung im Basisband	2
1.3	Die grundsätzlichen Schritte zur Erkennung und Detektion von Digitalen Signalen.	3
1.4	Modell der Empfänger-Seite einer binären Datenübertragung im Basisband (Korrelations-Empfang)	3
1.5	Die Signale im Korrelations-Empfänger	4
1.6	Amplituden-Dichte Verteilung pdf und Zeitverlauf von weißem Rauschen; der Effektivwert (RMS <i>root mean square</i>) ist σ	5
1.7	Die Signale im Korrelations-Empfänger mit Rauschen	6
1.8	Beispiel für den Potential-Verlauf (links); FIR-Filter und Matched Filter (Filterkoeffizienten in umgekehrter Reihenfolge)	7
1.9	Darstellung und Verteilung der (umsortierten) Werte $z(T)$	9
1.10	Die bedingten Wahrscheinlichkeits-Dichten $p(z s_1)$ und $p(z s_2)$	10
1.11	Gauß-Glocke ($\sigma = 1$), Error Function $\text{erf}(x)$, Komplementäre Error Function $\text{erfc}(x)$, Q-Funktion und gespiegelte Q-Funktion	11
1.12	Gauß-Glocke ($\sigma = 1$), Q-Funktion und gespiegelte Q-Funktion dazu flächengleiches Rechteck und Tangenten	11
1.13	Die Q-Funktion und ihre Grenzkurven (logarithmische Darstellung)	12
1.14	Zur meßtechnischen Bestimmung des Q-Faktors	13
1.15	Bitfehler-Wahrscheinlichkeit für bipolare und unipolare Digital-Übertragung	14
2.1	Beispiele für Leitungs-Codes im Basisband und deren Spektraldichten	15
3.1	AKF und PSD statistisch unabhängiger Daten mit \square Symbolform	16
3.2	BIPHASE Daten, deren AKF $R_{dd}(\tau)$ und Spektrale Leistungs-Dichte $S_{dd}(\omega)$	17
3.3	Das Leistungs-Dichte Spektrum der unverrundten Biphasen Symbole	18
4.1	Blockschaltbild der Duobinary Codierung (Klasse 2)	19
4.2	Übertragungsfunktion (Betrag) und Impulsantwort des Duobinary-Verfahrens Klasse 2	19
4.3	Blockschaltbild der Duobinary Codierung mit Pre-Codierung	20
4.4	Blockschaltbild der Pseudo Ternär Codierung mit Pre-Codierung	21
4.5	Übertragungsfunktion (Betrag) und Impulsantwort des Duobinary-Verfahrens Klasse 4 (pseudo ternär)	21

Basisband-Signale

Die Auf- und Abbereitung der Signale für Digitale Übertragungs-Systeme geschieht weitestgehend im Basis-Band. Unter dem Basis-Band wird ein Frequenzbereich verstanden, der von der Frequenz $\omega = 0$ bis zu einer (maximalen) Grenzfrequenz ω_g reicht, welche z.B. durch die dabei angewendete Digitale Signalverarbeitung bzw. deren Rechner-Technik festgelegt ist.

Die Einschränkung der Verarbeitungs-Geschwindigkeit durch die digitale Hardware führt dazu, daß die Digitalen Modulationen zunächst im Basis-Band durchgeführt und dann auf eine digital noch bequem realisierbare Zwischenfrequenz (ZF) umgesetzt werden. Erst daran anschließend erfolgt eine analoge Mischung auf die Sendefrequenz und die notwendige Verstärkung. Nur dieser letzte Schritt ist der analogen Hochfrequenz-Technik vorbehalten. Was für den Sender gilt, trifft umgekehrt entsprechend auch für den Empfänger zu. Hier wird mit Methoden der Hochfrequenz-Technik das Empfangssignal in eine Zwischenfrequenz-Lage oder ggf. direkt (mit einem I/Q Mischer) in die Basisband-Lage heruntergemischt (frequency down-conversion) und dann als Basisband-Signal weiterverarbeitet.

1 Digital-Übertragung im Basisband

In diesem Kapitel wird das Prinzip einer Binärübertragung im Basisband anhand von Beispielen einer Binär-Übertragung vorgestellt. Das betrachtete Übertragungssystem soll dabei möglichst einfach sein, damit die wesentlichen Prinzipien der digitalen Übertragung klar erkennbar werden.

1.1 Der Basisband-Kanal

Der Basisband-Kanal hat als Eingangs-Größen die Symbole im I- und Q-Kanal und entsprechende I und Q Ausgangs-Signale, Bild 1.1.

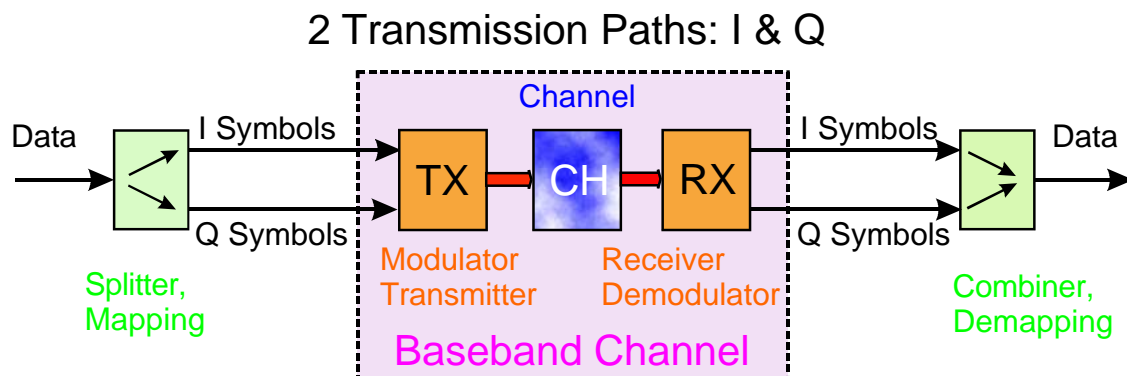


Bild 1.1: Blocksaltbild des I/Q Basisband-Kanals

Da im Basisband 2 Symbolströme (I & Q) simultan verarbeitet werden müssen, werden diese als komplexe Größen behandelt und demzufolge mit komplexer Rechnung berechnet.

- Um aber die wichtigen Prinzipien deutlicher herauszustellen, wird vorläufig nur der (reelle) I-Zweig betrachtet. Weiterhin werden die Symbole als Binär-Symbole angenommen. Die Blöcke Splitter (Mapper) und Combiner (Demapper) können deshalb vorläufig entsprechend vereinfacht werden.

1.2 Die Sender-Seite

Zunächst erfolgt auf der Senderseite die **Symbolbildung**. Die übertragenen (und gestörten) Symbole müssen im Empfänger wieder erkannt und decodiert werden. Zur Erkennung dient die **Korrelation** (im Zeitbereich) oder die „**Matched Filterung**“ (im Frequenzbereich). Daran anschließend erfolgt eine **Entscheidung**, mit der die digitale Information zurückgewonnen wird.

Die binären Daten werden dazu auf den Eingang eines Impulsgenerators gegeben. Dieser erzeugt aus einer logischen „1“ einen δ -Impuls „ \uparrow “ und aus einer logischen „0“ einen δ -Impuls „ \downarrow “. Damit entsteht zunächst eine Folge $d(t)$ von δ -Impulsen.

$$d(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i \delta(t - iT) \tag{1.1}$$

b_i wird durch das Datenbit i bestimmt. Es soll gelten

$$b_i = \begin{cases} +1: & \text{das Datenbit } i \text{ ist } 1 \\ -1: & \text{das Datenbit } i \text{ ist } 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

In diesem Beispiel hat man pro Bit ein Symbol bzw. jedes Symbol repräsentiert (nur) ein Bit. Damit handelt es sich um **Binär-Symbole**.

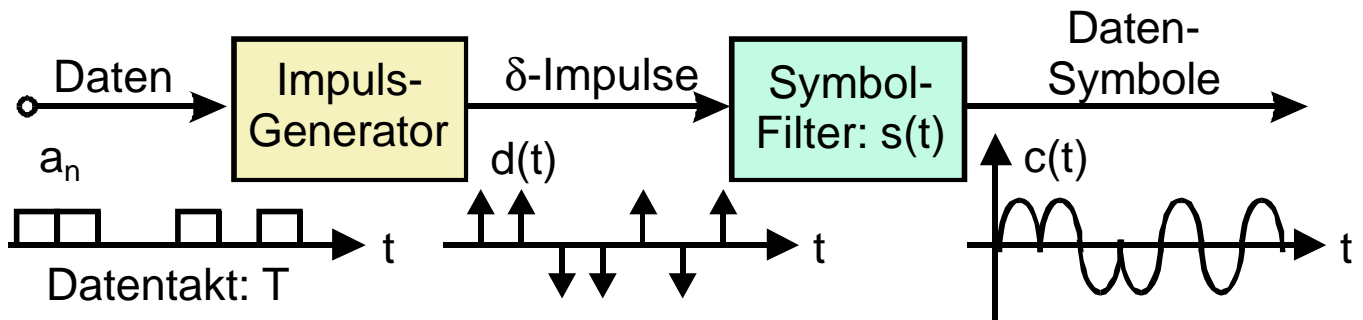


Bild 1.2: Modell der Sender-Seite einer binären Datenübertragung im Basisband

Für das nachgeschaltete Formungsfiler für Symbole ist (in diesem Beispiel) die Impulsantwort so gewählt, daß aus jedem Eingangs-Impuls ein verrundetes Daten-Symbol $s(t)$ entsteht. Insgesamt entsteht so ein **analoges** (Zeit- & Wert-kontinuierliches) bipolares Signal $c(t)$, das aus den verrundeten Daten-Symbolen $s_i(t)$ besteht.

$$c(t) = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i \delta(t - iT) \right\} * s(t) = d(t) * s(t) = \sum s_i(t) \tag{1.3}$$

Die binären Daten, die jeweils nur zu den Takt-Zeitpunkten $i \cdot T$ definiert und damit **zeitdiskret** sind, werden so auf **zeitkontinuierliche analoge Symbole** $s(t)$ abgebildet (Mapping). Die Symbol-Form ist in diesem Beispiel so gewählt, daß sich die einzelnen Symbole nicht überlappen,^{1,1} Bild 1.2.

Wie aus Bild 1.2 zu erkennen ist, wird bei dieser Digitalen Übertragung nur **eine einzige Symbol-Form** $s(t)$ verwendet (Form: „Cos-Kuppe“ bzw. „Sin-Kuppe“). Diese kann gemäß der einlaufenden Datenbits ihr Vorzeichen ändern. Hierin besteht die (digitale) Information, die der Empfänger **erkennen** muß und ausgeben soll.

1.3 Die Empfänger-Seite

Der Digitale Empfänger muß die Form (im Zeitbereich) der verwendeten Symbole genau kennen. Er vergleicht die empfangenen Datensymbole mit der ihm **bekanntem Symbol-Form** und berechnet daraus eine **Maßzahl für die Ähnlichkeit** mit dieser bekannten Form (Demodulation). Daraus wird dann mit Hilfe einer (geeignet gewählten) Schwelle eine **Entscheidung** getroffen, ob das empfangene Symbol eine „1“ oder eine „0“ sein soll (Detektion).

Die Symbol-Form ist eine Cos-Kuppe. Der Datenstrom $c(t)$ setzt sich daher aus $\pm s(t)$ Symbolen zusammen. Die empfangenen Symbole $s_i(t)$ sind daher:

$$s_i(t) = +s(t) = s_1(t) \quad \text{oder} \quad s_i(t) = -s(t) = s_2(t) \tag{1.4}$$

^{1,1}Daten-Symbole, deren Spektrum begrenzt ist, dauern (theoretisch) ∞ lang an und führen zu Symbolen, die sich überlappen. Siehe hierzu das Kapitel INV, „Inter-Symbol-Interferenz, ...“.

Zusätzlich kommt im (Basisband-) Kanal noch weißes Gauß-verteilt Rauschen $n(t)$ (AWGN additive *white Gaussian noise*) als Störung additiv hinzu. Damit erhält der Digitale Empfänger ein Blockschaltbild gemäß Bild 1.3.

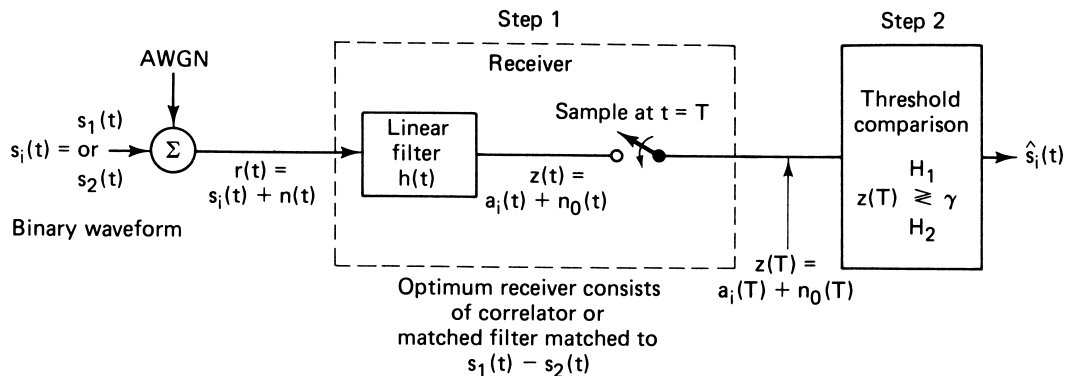


Bild 1.3: Die grundsätzlichen Schritte zur Erkennung und Detektion von Digitalen Signalen.

Da der Kanal Störungen $n(t)$ hinzufügt (im einfachsten Fall ist das AWGN), hat der Empfänger nicht das gesendete Datensignal $c(t)$ (bzw. die ungestörten Symbole s_i) zur Verfügung, sondern nur ein gestörtes Empfangssignal $r(t) = c(t) + n(t)$. Infolge dessen können die Entscheidungen des Empfängers fehlerhaft werden und der empfangene Datenstrom enthält dann Symbol- bzw. Bit-Fehler.

1.3.1 Korrelations-Empfänger

Da bei einer Digitalen Übertragung der **zeitliche Verlauf** der digitalen Symbole im Empfänger (zur Demodulation) **ausgewertet** wird, bietet es sich an, die Ähnlichkeit mit Hilfe einer Korrelation zu bestimmen. Der Empfänger enthält dann einen Kreuz-Korrelator, mit dessen Hilfe jede empfangene (verzerrte und gestörte) Symbolform aus $r(t)$ mit der im Empfänger gespeicherten (unverzerrten) Symbolform $s(t)$ verglichen wird. Dazu ist es erforderlich, daß der Symbol-Generator und der Takt synchronisiert sind, Bild 1.4.

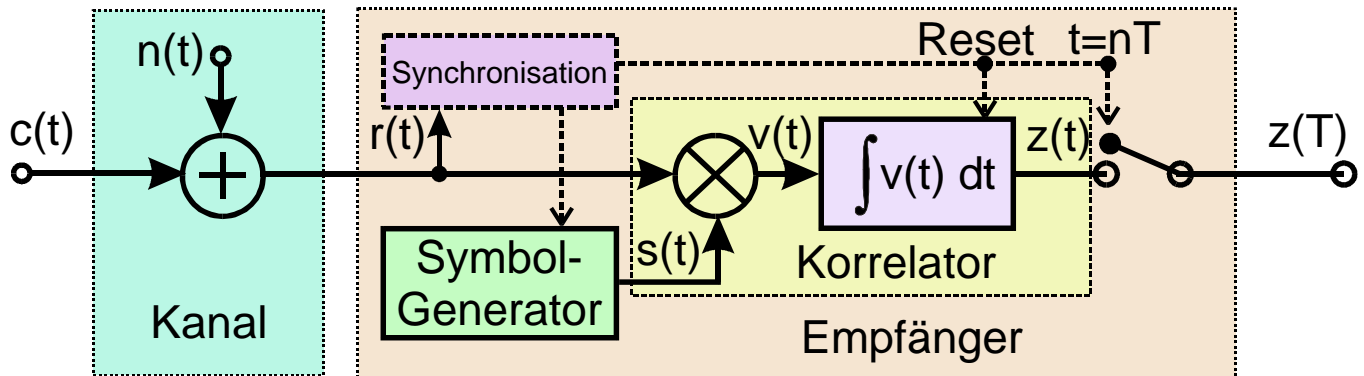


Bild 1.4: Modell der Empfänger-Seite einer binären Datenübertragung im Basisband (Korrelations-Empfang)

Allgemein ergibt sich die Korrelation $\varrho_{rs}(\tau)$ (in Abhängigkeit der gegenseitigen zeitlichen Verschiebung τ) als

$$\varrho_{rs}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)s(t + \tau)dt \tag{1.5}$$

Die Korrelation $\varrho_{rs}(\tau)$ hat zeitlich die doppelte Breite $2T$, wenn die Symboldauer T beträgt. Dies ist ganz analog zu der Breite des Ausgangssignals bei einer Faltung, und in der Tat kann eine Korrelation mit Hilfe

einer Faltung berechnet werden, wenn die erste Funktion gespiegelt wird.^{1,2}

Andererseits interessiert zum Zweck der **Erkennung der Symbole** nicht der gesamte Verlauf $\varrho_{rs}(\tau)$ der Kreuz-Korrelation, sondern tatsächlich nur der Wert, der sich ergibt, wenn beide Symbole genau übereinander liegen, die gegenseitige zeitliche Verschiebung $\tau = 0$ ist, also $\varrho_{rs}(0)$.

$$\varrho_{rs}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)s(t)dt \rightsquigarrow \varrho_{rs}(0) = \int_0^T r(t)s(t)dt; \quad nT \leq t \leq (n+1)T \tag{1.6}$$

Die empfangenen Symbole aus $r(t)$ und das im Empfänger vorrätige Symbol $s(t)$ dürfen daher **keine gegenseitige zeitliche Verschiebung** τ aufweisen. Daher muß ein **perfekter Synchronismus** zwischen den einlaufenden Symbolen in $r(t)$ und den lokal erzeugten Symbolen $s(t)$ vorhanden sein. Im Korrelator wird das Produkt der beiden (zu vergleichenden) Symbole während der Zeitdauer T aufintegriert.

Die gesendeten Datensymbole $s(t)$ (ohne Störungen durch den Kanal), die sich daraus nach der Multiplikation mit der Symbolform ergebende Zeitfunktion $v(t)$ und die über die Taktzeit T aufintegrierte Zeitfunktion (mit jeweils anschließendem Dump oder Reset) ist in Bild 1.5 dargestellt.

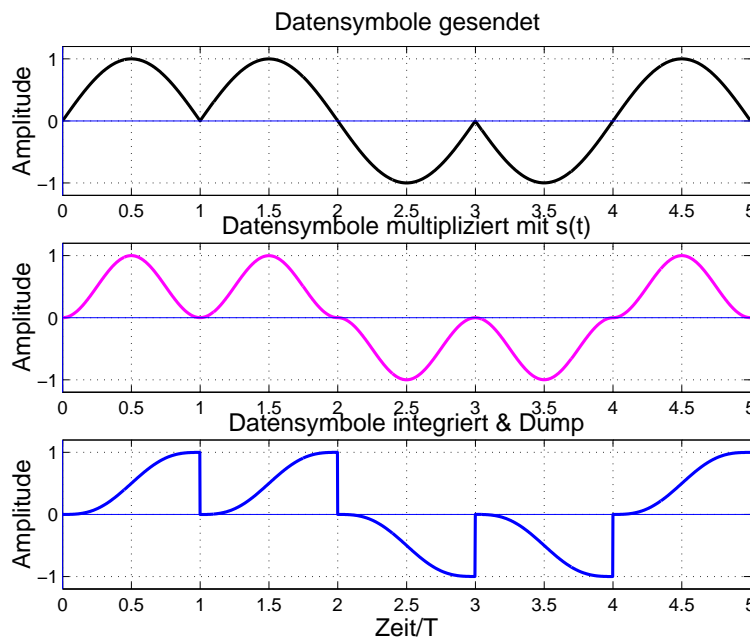


Bild 1.5: Die Signale im Korrelations-Empfänger (ohne Störungen durch den Kanal); oberes Bild: gesendete Datensymbole $c(t)$; mittleres Bild: $v(t)$; unteres Bild: $z(t)$

Für die Symbol-Form im Sender $s(t)$ wurde gewählt („Sin-Kuppe“):

$$s(t) = a \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right); \quad 0 < t < T \quad \text{Dimension: Spannung} \tag{1.7}$$

Nach der Multiplikation mit Symbolen $s(t)/a$ der Amplitude 1 im Empfänger folgt daraus (im ungestörten Fall):

$$v(t) = s^2(t)/a = a \sin^2\left(\pi \frac{t}{T}\right) = \frac{a}{2} \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)\right); \quad 0 < t < T \tag{1.8}$$

Die Integration erfolgt in der Form **mit laufender oberer Grenze** t , damit man den Zeitverlauf erhält:

$$z(t) = \frac{2a}{T} \int_0^t v(\xi)d\xi = \frac{a}{T} \left(t - \frac{T}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)\right); \quad 0 < t < T \quad \text{Dimension: Energie} \tag{1.9}$$

^{1,2}Siehe: „Signale und Systeme“, Kapitel „Die Fourier-Transformation und ihre Anwendungen“, Teil 6

Der Faktor $\frac{2}{T}$ in Gleichung (1.9) wurde gewählt, damit sich für $|z(T)|$ der Wert a ergibt. Damit sich die Dimension „Energie“ ergibt, muß die Gleichung (1.9) noch durch $R = 1\Omega$ dividiert werden. Bild 1.5 zeigt die entsprechenden Zeitverläufe.

Der zeitliche Verlauf der Ausgangs-Spannung $z(t)$ des Integrators kann (jeweils während der Zeit T des Datentaktes) geschrieben werden als:

$$z(t) = \int_0^t r(\xi)s(\xi)d\xi; \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.10)$$

Zum Zeitpunkt $t = T$ ist daher der Wert von $z(t)$ mit Gleichung (1.6):

$$z(T) = T \cdot \varrho_{rs}(0) \quad (1.11)$$

Nun wird der Integrator immer zu den Zeitpunkten $n \cdot T$ **resettet**, nachdem zuvor der Abtast-Wert $z(T) = T \cdot \varrho_{rs}(0)$ aus dem Zeitverlauf $z(t)$ des Ausgangssignals des Kreuz-Korrelators gewonnen wurde.

Notwendigkeit der Takt-Information im Digitalen Empfänger

Der Korrelations-Empfänger kann nur dann wie gewünscht funktionieren, wenn

- der Symbolgenerator mit dem Symboltakt exakt synchronisiert ist und wenn
- die Zeitpunkte für Abtasten und Resetten mit dem Symboltakt synchronisiert sind.

Da der Empfänger nur die (gestörten) Symbole empfängt und keine extra Leitung für die Übertragung des Taktes vorhanden ist, ist im Empfänger eine (aufwendige) **Takt-Rückgewinnung** (Synchronisation in Bild 1.4) erforderlich.

1.3.2 Empfangs-Symbole durch weißes Rauschen gestört

Die bisherige Analyse des Korrelations-Empfängers erfolgte noch unter der Annahme, daß die Störung im Kanal nicht vorhanden ist, also $n(t) = 0$. Nunmehr wird für $n(t)$ ein **weißes Rauschen mit Gaußlockenförmiger Amplituden-Dichte Verteilung** (pdf *probability density function*) angenommen, Bild 1.6.

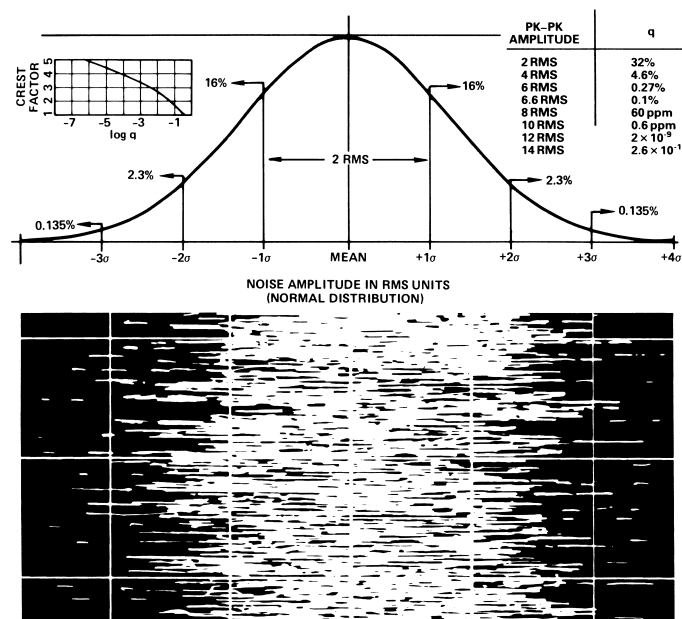


Bild 1.6: Amplituden-Dichte Verteilung pdf und Zeitverlauf von weißem Rauschen; der Effektivwert (RMS *root mean square*) ist σ .

Die Wahrscheinlichkeits-Dichte-Funktion $p(n_0)$ (*probability density function*, pdf) des Gauß-verteiltern Rauschens ist:

$$p(n_0) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{n_0}{\sigma_0}\right)^2} = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{n_0}{\sigma_0}\right)^2 \right] \quad \text{pdf Gauß-förmiges Rauschen} \quad (1.12)$$

Hierbei ist σ_0 der **Effektivwert** (Standard-Abweichung) und σ_0^2 die **Wechsel-Leistung** (Varianz) des Rauschens im Signal $z(t)$ (am Ausgang des Korrelators). Eine derartige Rauschspannung ist den empfangenen Symbolen $r(t)$ überlagert. Die sich daraus ergebenden Zeitverläufe $r(t), v(t), z(t)$ im Korrelations-Empfänger zeigt Bild 1.7 für die Effektivwerte $\sigma = [2, 3, 4, 5, 6, 7]$ des Rauschens.

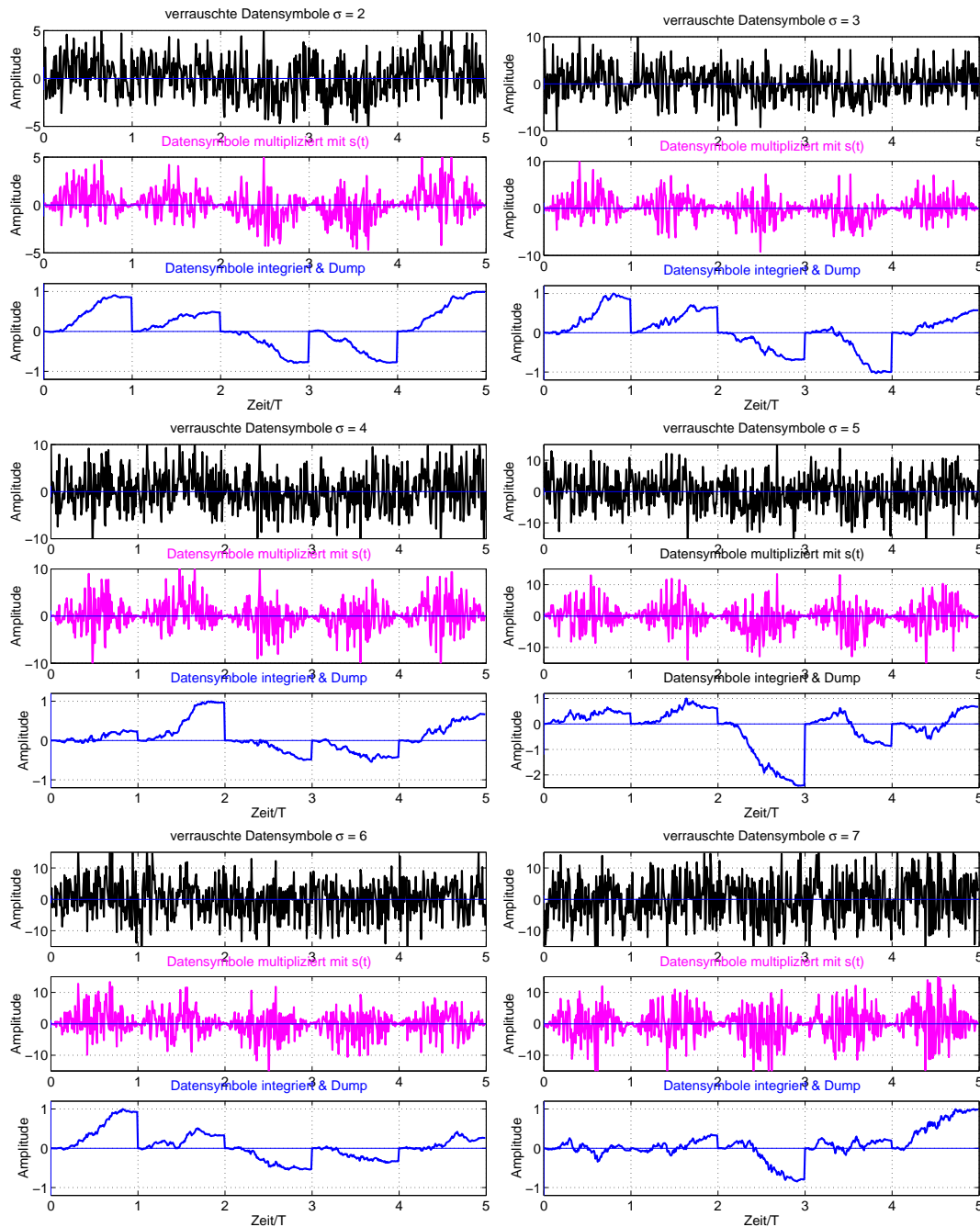


Bild 1.7: Die Signale im Korrelations-Empfänger (mit Störungen durch Rauschen, mit den Effektivwerten $\sigma = [2, 3, 4, 5, 6, 7]$); oberes Bild: gesendete Datensymbole $c(t)$; mittleres Bild: $v(t)$; unteres Bild: $z(t)$

Diese Rausch-Störung tritt bei einer Digital-Übertragung in jedem Fall auf. Der Grund dafür ist, daß die Übertragung trotzdem hinreichend fehlerfrei gemacht werden kann und man den großen Vorteil hat, mit weniger Sendeleistung auszukommen bzw. bei gegebener Sendeleistung eine größere Reichweite erzielt werden kann. **Praktische Digitale Übertragungs-Systeme gehen daher immer bis an diese Grenze.**^{1.3}

1.3.3 Matched Filter Empfänger

Die Korrelation (Symbol \star) kann durch eine Faltung (Symbol $*$) dargestellt werden und es gilt:^{1.4}

$$h(\tau) \star s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)s(t + \tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(-\zeta)s(\tau - \zeta)d\zeta = h(-\tau) * s(\tau) \tag{1.13}$$

$$h(\overset{\downarrow}{\tau}) \star \underset{\downarrow}{s}(\tau) = h(\overset{\downarrow}{-\tau}) \star \underset{\downarrow}{s}(\tau) \quad \text{Korrelation} \implies \text{Faltung} \tag{1.14}$$

Da die Faltung die Wirkung eines Filters im Zeitbereich beschreibt, kann somit auch die Korrelation durch eine Filterung ersetzt werden. Offensichtlich muß dazu dieses Filter eine **zeitgespiegelte Impulsantwort** $h(-t)$ aufweisen. Für ein Filter mit FIR-Struktur bedeutet das, daß die **Filterkoeffizienten** h_n in **umgekehrter Reihenfolge** einzugeben sind, Bild 1.8.

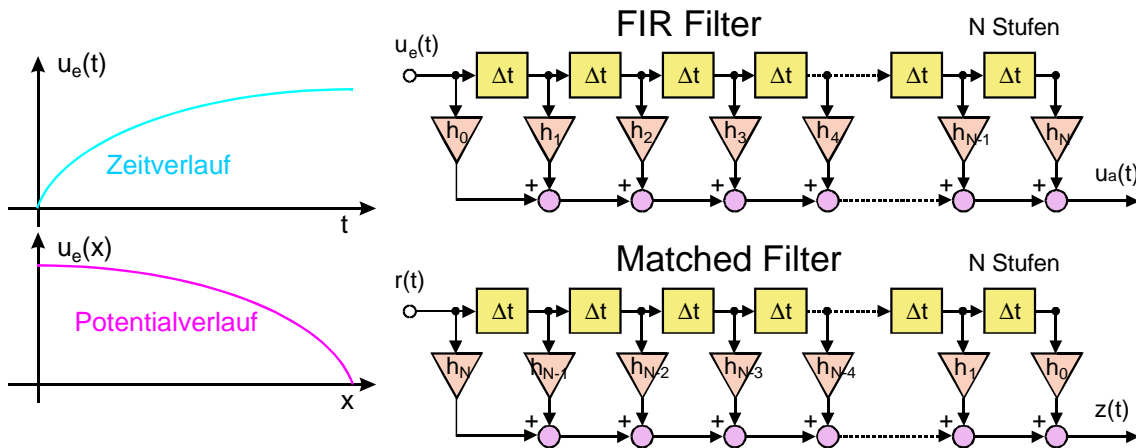


Bild 1.8: Beispiel für den Potential-Verlauf (links); FIR-Filter und Matched Filter (Filterkoeffizienten in umgekehrter Reihenfolge)

Die Filterkoeffizienten h_n eines Matched Filters (MF) sind gemäß der gespiegelten Symbolform $s(-t)$ zu wählen, an die es angepaßt (*matched*) sein soll, d.h. es sind entsprechende Abtast-Werte einzuprogrammieren. Werden Daten-Symbole verwendet, die in ihrer Bandbreite begrenzt sind, muß die Filterlänge auch die Nebenmaxima der Symbole berücksichtigen.

1.3.4 Optimierung des Matched Filters

Der Abtastwert $z(T)$ zum Zeitpunkt $t = T$ besteht aus einer **Signalkomponente** der Größe a_i und einer **Rauschkomponente** n_0 . Die Rauschkomponente hat die **Varianz** (mittlere Rauschleistung) σ_0^2 . Damit läßt sich das Signal-zu-Geräusch-Verhältnis zum Zeitpunkt T angeben zu:

$$\left(\frac{S}{N} \right)_T = \frac{a_i^2}{\sigma_0^2} \text{SNR}_T \tag{1.15}$$

^{1.3}Aus der Darstellung in Bild 1.7 kann nicht der Schluß gezogen werden, daß der Effektivwert σ des Rauschens den Wert der 7 fachen Amplitude der (empfangenen) Datensymbole haben darf, bis Fehler auftreten. Es sind hier ja nur 5 Symbole dargestellt. Eine digitale Übertragung wird aber (je nach Aufwand in der Codierung) bereits unbrauchbar, wenn 1 von 10.000 bis 1 von 1.000 Symbolen fehlerhaft empfangen werden (Symbol-Fehlerrate SER $10^{-4} \dots 10^{-3}$).

^{1.4}Siehe: „Signale und Systeme“, Kapitel „Die Fourier-Transformation und ihre Anwendungen“, Teil 6.3.5

Das gesuchte Matched Filter (MF) $H_o(\omega)$ ist dasjenige, das dieses Signal-zu-Geräusch-Verhältnis maximiert.

Die Signal-Komponente am Eingang des (noch nicht optimierten) Filters $H(\omega)$ sei $c(t)$ mit der Spektraldichte $C(\omega)$. Die Signalkomponente am Ausgang des Filters sei $a(t)$. Damit folgt:

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) C(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.16)$$

Die zweiseitige Spektraldichte des weißen Rauschens ist konstant und beträgt $N_0/2$. Dadurch wird die Rauschleistung am Filter-Ausgang:

$$\sigma_0^2 = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \quad (1.17)$$

Gleichungen (1.16) und (1.17) werden in Gleichung (1.15) eingesetzt, woraus folgt:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) C(\omega) e^{j\omega T} d\omega \right|^2}{\frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega} \quad (1.18)$$

Der nächste Schritt besteht nun darin, diesen Ausdruck zu optimieren. Hierzu wird die Schwarz'sche Ungleichung^{1.5} auf den Zähler angewendet.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T \leq \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |C(\omega) e^{j\omega T}|^2 d\omega}{\frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |C(\omega) e^{j\omega T}|^2 d\omega}{N_0/2} = \frac{2E}{N_0} \quad (1.19)$$

Hierbei ist E die Energie des Eingangssignals $c(t)$. Damit folgt für das Optimum, welches nur von der Signal-Energie, nicht aber von der Symbol-Form abhängt:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T^{\max} = \frac{2E}{N_0} \quad \text{SNR}_T^{\max} \quad (1.20)$$

Das Gleichheitszeichen in Gleichung (1.20) bzw. in der Schwarz'schen Ungleichung gilt nur dann, wenn die Übertragungsfunktion des Filters lautet:

$$H(\omega) = \boxed{H_o(\omega) = k \cdot C^*(\omega) e^{-j\omega T}} \quad \text{ÜTF matched Filter} \quad (1.21)$$

Daraus folgt für die Impulsantwort $h_o(t)$ des Matched Filters (MF)

$$h_o(t) = \begin{cases} k \cdot s(T-t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{Impulsantwort MF} \quad (1.22)$$

- Damit ist das Ergebnis bestätigt (und präzisiert), das sich für die Impulsantwort des MF aufgrund der Darstellung der Korrelation durch die Faltung bereits ergeben hat.

1.3.5 Fehler-Raten bei binärer Datenübertragung (Störung durch weißes Gauß'sches Rauschen)

Die integrierten Symbole $z(t)$ am Ausgang des Korrelators, Bild 1.5 (Seite 4), haben einen überlagerten Rauschanteil $n_0(t)$. Dieser ist zwar nicht mehr „weiß“, weil der Integrator eine Frequenzabhängigkeit erzeugt, jedoch ist die Amplituden-Dichte-Funktion trotzdem noch Gauß-förmig.

^{1.5}Die entsprechende Formulierung für Vektoren lautet, daß das innere Produkt kleiner oder höchstens gleich dem Produkt der Beträge ist, $|\langle a, b \rangle| \leq |a| \cdot |b|$.

Die Verallgemeinerung für Flächen unterhalb von Funktionen lautet $k \int_{-\infty}^{\infty} a(t)^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} b(t)^2 dt \geq k \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} a(t)b(t) dt \right]^2$.

Analysiert man entsprechend zu Bild 1.7 (Seite 6) die detektierten Werte $z(kT); k = 1 \dots N$ für $N \rightarrow \infty$ und sortiert so um, daß zuerst die Werte dargestellt werden, die ohne Störung +1 ergeben und anschließend diejenigen, die ohne Störung -1 ergeben, erhält man die Darstellung in Bild 1.9.

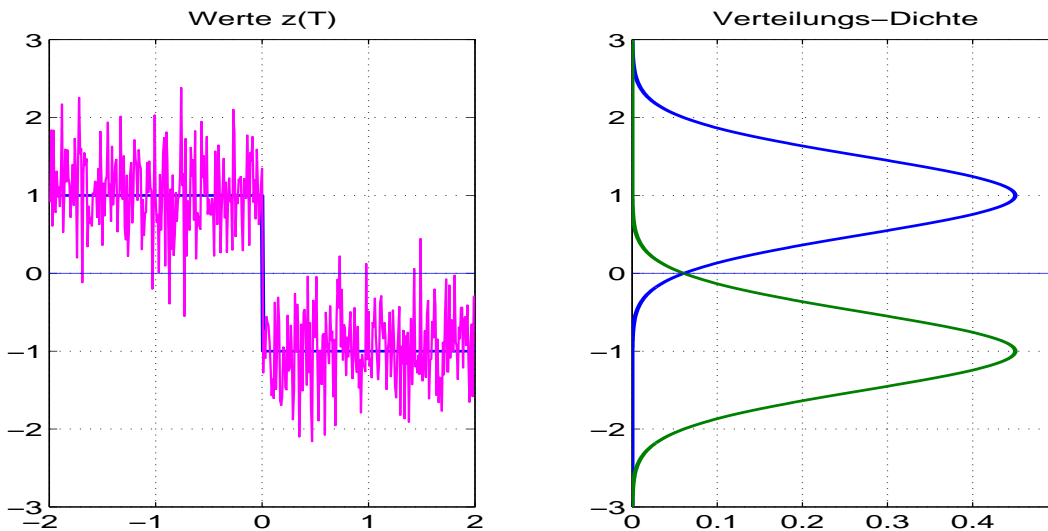


Bild 1.9: Darstellung und Verteilung der (umsortierten) Werte $z(T)$

Die unverrauschten Werte $z(T)$ ergeben umsoriert den (idealen) Verlauf $+1 \rightarrow -1$. Das überlagerte Rauschen $n_0(t)$ erhält dadurch einen Konstantanteil (in diesem Fall $\pm a$), der sich als Mittelwert der Gauß-Verteilungen wieder findet.

Das überlagerte Rauschen hat zur Folge, daß zum Abtast-Zeitpunkt eine Fehlentscheidung entstehen kann, woraus dann ein Symbol- bzw. Bitfehler resultiert.

1.3.6 Entscheider-Schwelle und Bitfehler-Wahrscheinlichkeit

Die gewonnenen Werte $z(T)$ bzw. $z(nT)$ werden nun einem Entscheider zugeführt, der die binären Daten zurückgewinnt, Bild 1.3 (Seite 3). Dieser Schritt wird mit Detektion (*detection*) bezeichnet.

Wenn dabei zum Abtast-Zeitpunkt die Amplitude und die Polarität der überlagerten Rauschspannung so sind, daß die Entscheidungs-Schwelle γ_0 in verkehrter Richtung überschritten wird, entsteht ein Bit-Fehler.

Die Gauß-Glocken der Amplituden-Dichte $p(n_0)$, Gleichung (1.12) und Bild 1.9, erscheinen hierbei als die **bedingten Wahrscheinlichkeits-Dichte-Funktionen** $p(z|s_1)$ und $p(z|s_2)$. Diese sind die Verteilungsdichten für die Fälle, daß das Symbol s_1 bzw. s_2 gesendet wurde.

$ \begin{aligned} p(z s_1) &= \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - a_1}{\sigma_0} \right)^2 \right] \\ p(z s_2) &= \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - a_2}{\sigma_0} \right)^2 \right] \end{aligned} $	bedingte pdf	(1.23)
---	---------------------	--------

Die Entscheidungs-Schwelle sei zu γ_0 gewählt. Damit erhält man die bedingten Wahrscheinlichkeits-Dichte-Funktionen $p(z|s_1)$ und $p(z|s_2)$, wie sie in Bild 1.10 dargestellt sind.

Der Empfänger entscheidet nun nach folgenden **Hypothesen** (Gewißheit gibt es im Empfänger nicht!):

- Liegt $z(T)$ links der Schwelle γ_0 , entscheide daß $s_2(t)$ gesendet wurde. (Hypothese H_2)
- Liegt $z(T)$ rechts der Schwelle γ_0 , entscheide daß $s_1(t)$ gesendet wurde. (Hypothese H_1)

$ \begin{array}{c} H_1 \\ z(T) \gtrless \gamma_0 \\ H_2 \end{array} \longleftrightarrow \begin{cases} z(T) > \gamma_0 & \text{wähle Hypothese } H_1 : s_1(t) \text{ wurde gesendet} \\ z(T) < \gamma_0 & \text{wähle Hypothese } H_2 : s_2(t) \text{ wurde gesendet} \end{cases} $	(1.24)
--	--------

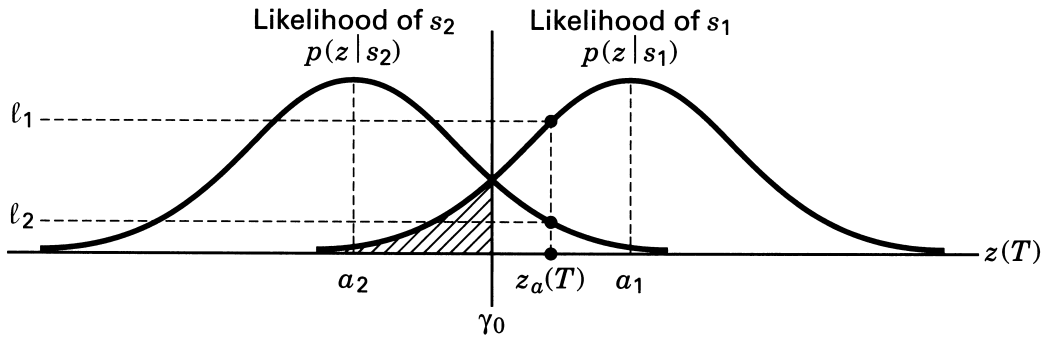


Bild 1.10: Die bedingten Wahrscheinlichkeits-Dichten $p(z|s_1)$ und $p(z|s_2)$

Bei einer bipolaren Binär-Übertragung ist die Entscheidungs-Schwelle bei $\gamma_0 = 0$, wenn im Datenstrom im Mittel gleich viele „L“ wie „0“ enthalten sind. Dies wird rein anschaulich auch durch die Darstellung in Bild 1.9 suggeriert.

Wenn das Symbol $s_1(t)$ gesendet wurde, der „entschiedene“ Wert $z(T)$ jedoch links der Schwelle γ_0 liegt, also die Hypothese H_2 entschieden wurde, ist ein Fehler entstanden. Die schraffierte Fläche in Bild 1.10 gibt die Wahrscheinlichkeit P_{B_2} dafür an. Genau so gut entsteht ein Fehler, wenn das Symbol $s_2(t)$ gesendet wurde und der „entschiedene“ Wert $z(T)$ rechts der Schwelle γ_0 liegt, also H_1 entschieden wurde. Es sind also beide Werte P_{B_2} und P_{B_1} zu addieren. Damit gilt für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit.

$$P_B = P_{B_2} + P_{B_1} = P(H_2|s_1)P(s_1) + P(H_1|s_2)P(s_2) \quad \text{Bitfehler-Wahrscheinlichkeit} \quad (1.25)$$

Sind (wie hier) die Dichtefunktionen $p(z|s_1)$ und $p(z|s_2)$ symmetrisch und die „L“ und „0“ Datenbits gleich wahrscheinlich und damit (die „à priori Wahrscheinlichkeiten“) $P(s_1) = P(s_2) = 0,5$, so folgt:

$$P_B = P(H_2|s_1) = P(H_1|s_2) \quad (1.26)$$

Damit liegt die Schwelle γ_0 genau zwischen a_2 und a_1 .

$$\gamma_0 = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (\text{für } a_2 = -a_1 \text{ folgt daraus } \gamma_0 = 0.) \quad (1.27)$$

Die Fehlerwahrscheinlichkeit P_B folgt aus dem **Integral über die schraffierte Fläche** der Dichtefunktion $p(z|s_1)$ oder $p(z|s_2)$.

$$P_B = \int_{\frac{a_1+a_2}{2}}^{\infty} p(z|s_2) dz = \int_{\frac{a_1+a_2}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - a_2}{\sigma_0} \right)^2 \right] dz \quad (1.28)$$

Mit der Substitution

$$\xi = \frac{z - a_2}{\sigma_0}; \quad \sigma_0 d\xi = dz; \quad z = \frac{a_1 + a_2}{2} \rightarrow \xi = \frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0} \quad (1.29)$$

ergibt sich:

$$P_B = \int_{\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{\xi^2}{2} \right] d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}}^{\infty} \exp \left[-\frac{\xi^2}{2} \right] d\xi \quad (1.30)$$

- Wie häufig Fehler entstehen, hängt davon ab, wie groß der **Spitze-Spitze-Wert** ($a_1 - a_2$) des **Signals** $z(t)$ im Verhältnis zum **Effektivwert** σ_0 des **Rauschens** ist.

Allerdings ist es bei Digitalen Übertragungen üblich, nicht die Amplituden bzw. Effektivwerte der Signale am Entscheider zu betrachten, sondern die **Energie der Datensymbole** und die **Spektrale Leistungsdichte des Rauschens**. Wie die Energie der Datensymbole in die Amplitude des Nutz-Signals eingeht, ist abhängig vom gewählten Modulationsverfahren.

1.3.7 Gauß'sche Fehlerfunktion und Q-Funktion

Das Integral über die Gauß'sche Glockenkurve, Gleichung (1.30). Es ist als Gauß'sche Fehlerfunktion erf(x) bzw. als Q-Funktion Q(x) bekannt, Bilder 1.11 und 1.12.

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi; \quad \text{Error Function} \quad \text{erf}(-x) = -\text{erf}(x) \quad (1.31)$$

Die Funktion erf(x) läßt sich nicht analytisch berechnen, liegt jedoch tabellarisch und in Näherungsformeln vor. Die komplementäre Fehlerfunktion dazu ist erfc(x) und diese ist eng verwandt mit der Q-Funktion Q(x), die bei der Berechnung der Symbol-Fehler-Rate Verwendung findet. Q(-x) ist die gespiegelte Q-Funktion und entsteht aus der Gauß-Glocke durch Integration mit laufender oberer Grenze.

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi = 1 - \text{erf}(x) = 2Q(\sqrt{2}x) \quad (1.32)$$

$$Q(x) = \frac{\text{erfc}(x/\sqrt{2})}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\xi^2/2} d\xi; \quad (\sigma_x = 1) \quad \text{Q-Funktion} \quad (1.33)$$

$$Q(-x) = 1 - Q(x) = \frac{1 + \text{erf}(x/\sqrt{2})}{2} \quad (1.34)$$

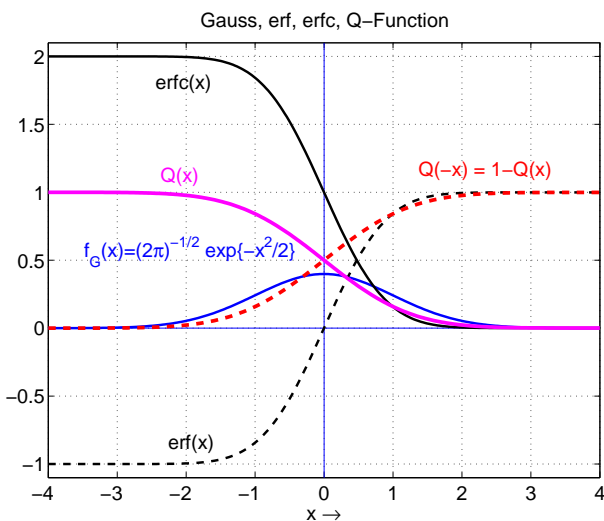


Bild 1.11: Gauß-Glocke (σ = 1), Error Funktion erf(x), Komplementäre Error Funktion erfc(x), Q-Funktion und gespiegelte Q-Funktion

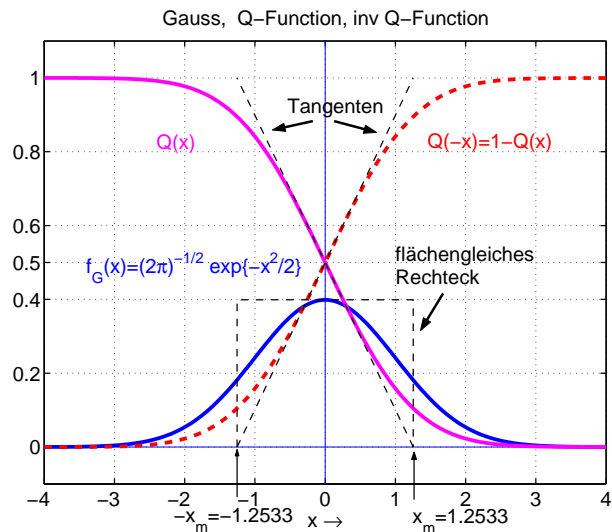


Bild 1.12: Gauß-Glocke (σ = 1), Q-Funktion und gespiegelte Q-Funktion dazu flächengleiches Rechteck und Tangenten

Das Integral in Gleichung (1.30) mit der unteren Schwelle $x = \frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}$ kann mit Hilfe der Q-Funktion Q(x) bestimmt werden.

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\right] d\xi \quad (1.35)$$

Für große Werte von x gilt die Näherung:

$$\frac{(x^2 - 1)e^{-x^2/2}}{x^3\sqrt{2\pi}} \approx Q(x) \approx \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} \quad (1.36)$$

Wenn die Gauß-Glocken in Bild 1.10 (Seite 10) sich nur wenig überschneiden, wie das für geringe Fehlerraten erwünscht ist, werden die Werte von $Q(x)$ entsprechend klein und man kann aus der linearen Darstellung der Bilder 1.11 und 1.12 nichts mehr ablesen.

Bild 1.13 zeigt deshalb die Q -Funktion in logarithmischer Darstellung. Diese hat die für die Bitfehler-Kurven typische „Wasserfall“-Form.

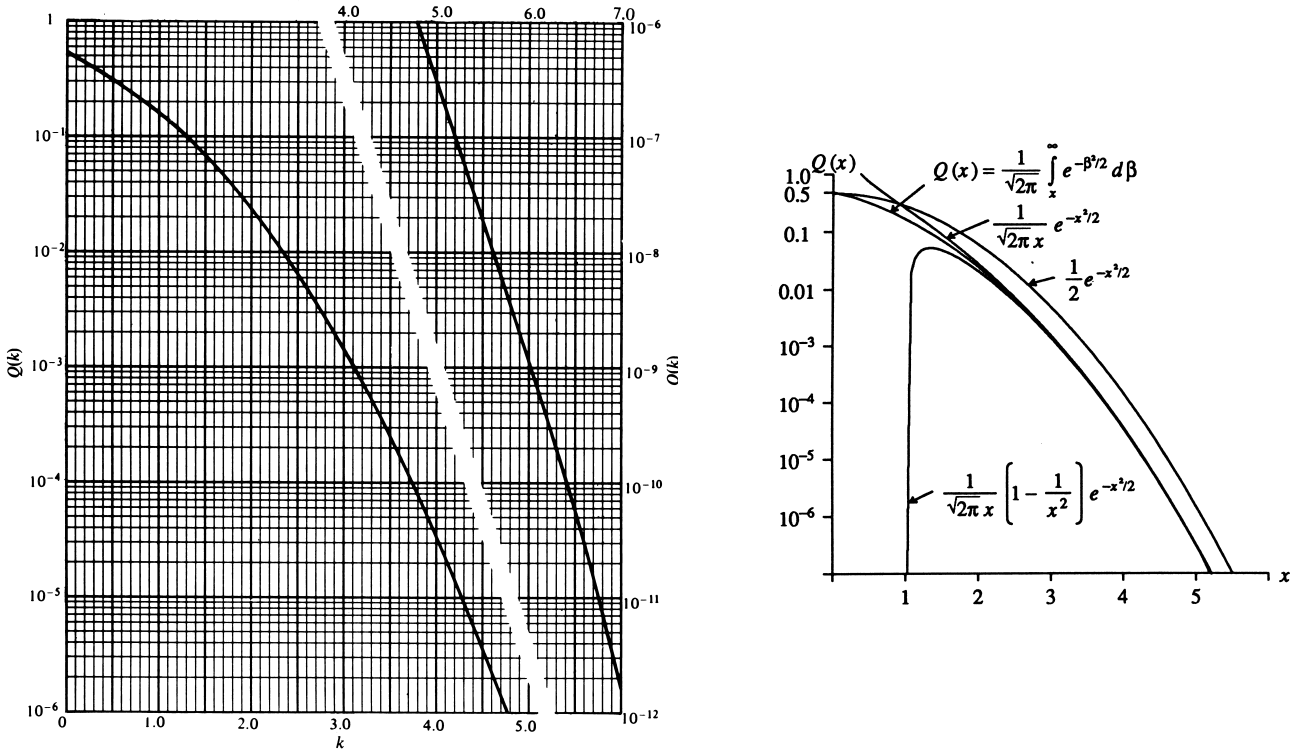


Bild 1.13: Die Q -Funktion und ihre Grenzkurven (logarithmische Darstellung)

1.3.8 Bit-Fehler-Rate

Mit Hilfe der Q -Funktion ergibt sich gemäß Gleichung (1.30) für die Bit-Fehler-Rate P_B (BER *bit error rate*):

$$P_B = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}\right) \tag{1.37}$$

Der Wert $\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}$ muß maximiert werden, damit BER minimal wird. Im Abschnitt 1.3.4 (Optimierung des Matched Filters, Seite 7) zeigte es sich, daß das Signal-zu-Geräusch-Verhältnis optimiert werden kann, Gleichung (1.20). Die Signal-Energie ergibt sich zu:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T^{\max} = \frac{2E}{N_0} = \frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma_0^2} \tag{1.38}$$

Hieraus folgt

$$\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0} = \sqrt{\frac{E_d}{2N_0}} \tag{1.39}$$

Q-Faktor

wobei $E = E_d$ die Energie des Differenz-Signals ist.

1.3.9 Der Q-Faktor

In der Optischen Übertragungstechnik wird der Ausdruck Gleichung (1.39), also das **Argument der Q-Funktion**, als **Q-Faktor** bezeichnet, da die betreffenden Größen bequem mittels (optischer) Digitaler Oszilloskope meßtechnisch bestimmt werden können. Man erhält dabei ein Augendiagramm, aus dem der Abstand der logischen Pegel und die Größe des bei jedem Pegel vorhandenen eff. Rauschens σ_0 bzw. σ_1 bestimmt werden kann, Bild 1.14. Es ist typisch für eine Optische Übertragung, daß die Größe des Rauschens bei logisch „0“ anders ist als bei logisch „1“, daher $2\sigma_0 \rightsquigarrow \sigma_0 + \sigma_1$.

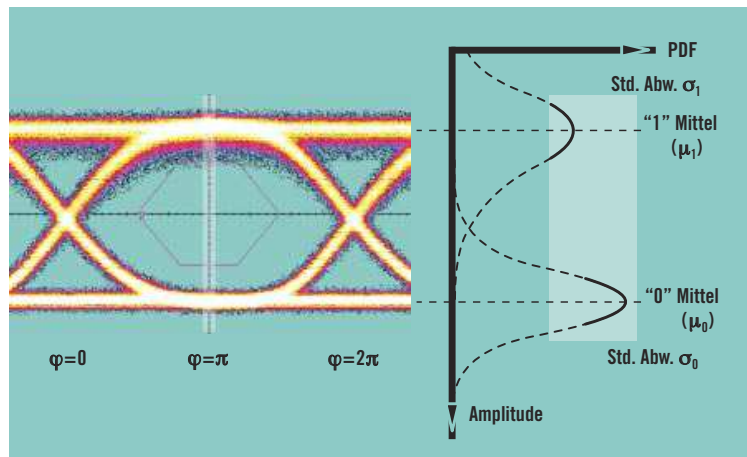


Bild 1.14: Zur meßtechnischen Bestimmung des Q-Faktors

1.3.10 Bipolare Datenübertragung

Bei einer bipolaren Übertragung hat die Differenz den doppelten Wert der Symbolgröße. Damit hat die Energie des Differenz-Signals E_d den 4 fachen Wert der Bit-Energie E_b . Damit folgt für die bipolare Übertragung:

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \quad (1.40)$$

1.3.11 Unipolare Datenübertragung

Bei einer unipolaren Übertragung wird in der Hälfte der Zeit (d.h. für die „0“ Bits) nichts übertragen, wodurch sich die Signalenergie halbiert. Deswegen gilt für die unipolare Übertragung:

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (1.41)$$

1.3.12 Die Fehlerwahrscheinlichkeit P_B ist unabhängig von der Form der Symbole.

Im ersten Moment mag es verwundern, daß nur die (mittlere) Signal-Energie (bzw. Symbol-Energie) in diese Beziehung eingeht, nicht jedoch die Form der Symbole. Das erklärt sich ganz einfach. Durch die Korrelation — oder genau so durch die „Matched Filterung“ — erhält man zum Abtast-Zeitpunkt (also bei einer Verschiebung $\tau = 0$) immer ein Maximum und zwar **unabhängig von der gewählten Form der Symbole**, denn Sender und Empfänger verwenden in jedem Fall die gleiche Form.

Die Integration in Gleichung (1.9) zusammen mit Gleichung (1.8) läßt zusätzlich erkennen, daß das Signal $z(t)$ dimensionsmäßig eine Energie darstellt und deshalb $z(T)$ proportional zur Symbol-Energie ist. Bei einer Binär-Übertragung ist die Symbol-Energie gleich der Bit-Energie E_b . Die Bitfehler-Rate wird damit abhängig vom Verhältnis der Bit-Energie E_b zur Spektralen Leistungsdichte N_0 des weißen Rauschens und vom gewählten Modulationsverfahren.

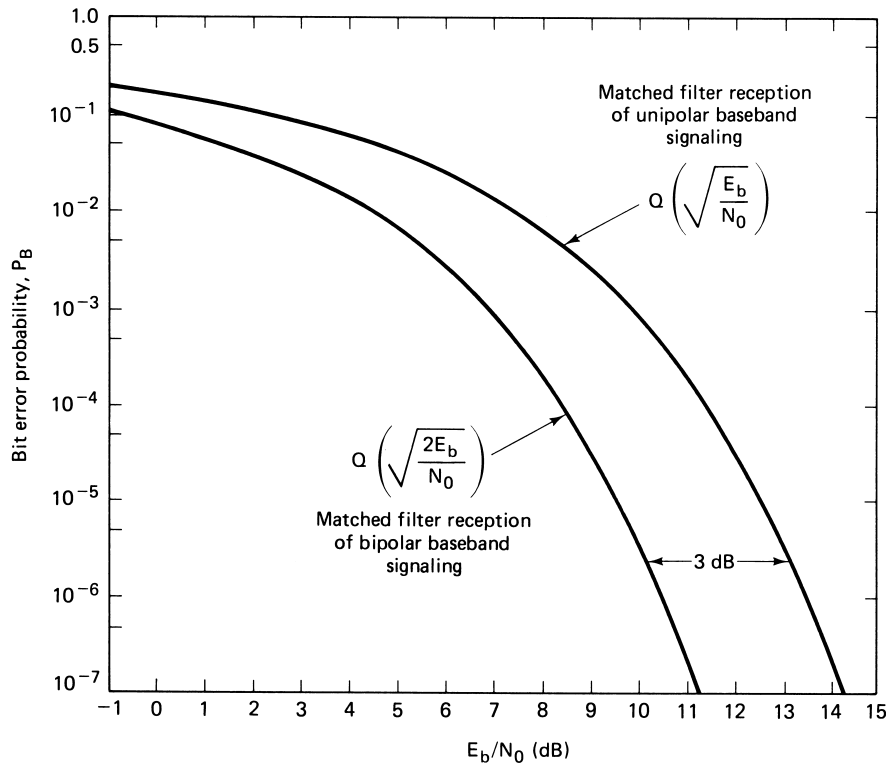


Bild 1.15: Bitfehler-Wahrscheinlichkeit für bipolare und unipolare Digital-Übertragung

2 Datenformate für Basisband-Übertragung

Die wichtigsten Anwendungen der Basisband-Übertragung sind:

- Daten-Speicherung und -Wiedergabe (magnetisch: Floppy, Festplatte)
- Daten-Speicherung und -Wiedergabe (optisch: CD, DVD)
- Daten-Übertragung auf Leitungen (elektrisch)
- Daten-Übertragung auf optischen Leitungen (Glasfaser)

In allen diesen Fällen schließen die physikalischen Eigenschaften dieser (Übertragungs-) Kanäle eine direkte Übertragung binärer Daten aus, unabhängig davon, ob die Daten verrundet oder unverrundet sind. Infolge der speziellen Eigenschaften der Übertragungskanäle ist man also zu einer Umcodierung gezwungen um die Digitale Übertragung an den Übertragungs-Kanal bzw. an dessen spektrale Eigenschaften anzupassen.

Als Beispiele seien benannt:

- Ein magnetischer Lesekopf gibt nur eine Spannung ab, wenn die Magnetisierung sich ändert, nicht jedoch bei einer konstanten (Nord oder Süd) Magnetisierung.
- Elektrische Leitungen erfordern Signale, die keinen Gleichanteil enthalten. Verantwortlich dafür ist die ein- und ausgangsseitige Ankopplung über Trafos, die zur Vermeidung von Brummschleifen erforderlich sind.
- Einfügen von Taktinformation in den Datenstrom (erleichtert die empfängerseitige Taktsynchronisation).

Beispiele für solche Leitungscodes und deren Spektralverteilungen sind in Bild 2.1 gezeigt. Hierbei sind (zur Vereinfachung) unverrundete Datensymbole gezeichnet.

Zusätzlich zu der Anpassung an die physikalischen Eigenschaften des Übertragungskanals ist in der Praxis auch noch eine Anpassung an die Störungen im Kanal erforderlich. Die Anpassung an die Störungen erfolgt durch Fehlerschutz-Codierung. Hiervon gibt es eine vielfältige Palette, entsprechend zu den mannigfachen Störungen im Kanal.

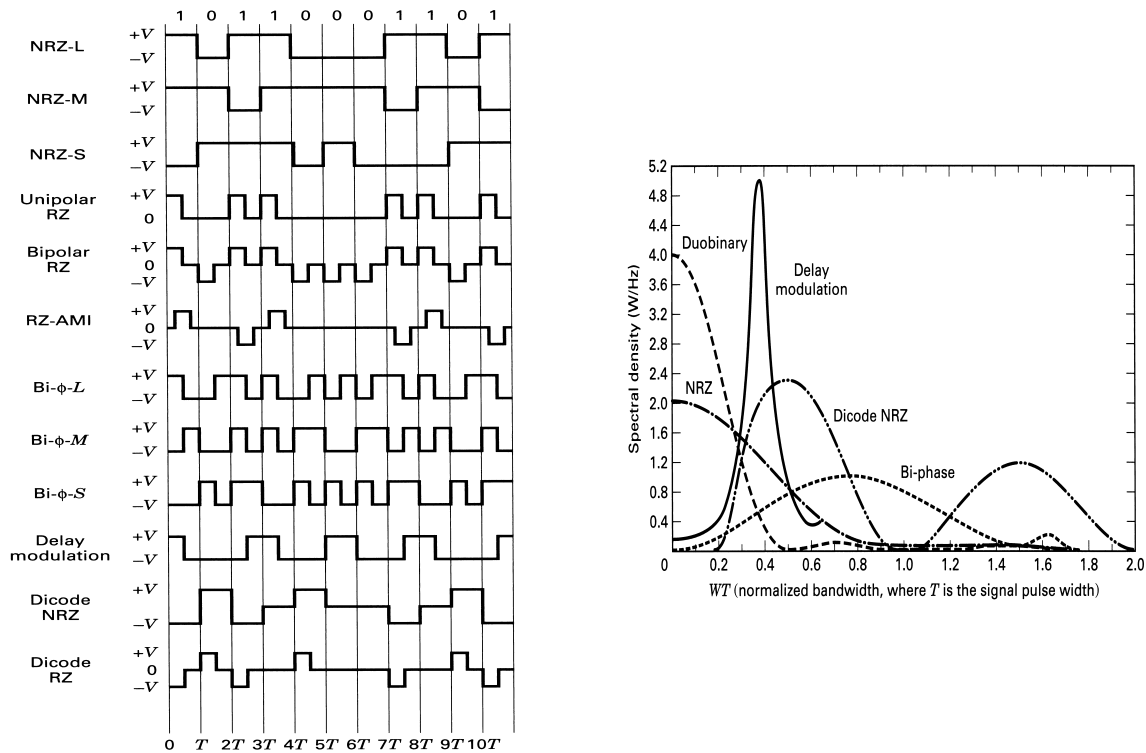


Bild 2.1: Beispiele für Leitungs-Codes im Basisband und deren Spektraldichten

3 Spektren Digitaler Signale

Zur Bestimmung der spektralen Leitungs-Dichten digitaler Signale wird das Blockschaltbild 1.2 (Seite 2) angenommen, wonach die Datensymbole $c(t)$ nach einer Filterung der Daten (als δ -Impulse $d(t)$) durch ein Symbol-Filter mit der Impulsantwort $h(t) = s(t)$ entstehen. Damit gilt:

$$c(t) = d(t) * s(t) \tag{3.1}$$

Bildet man die Auto-Korrelations-Funktionen (AKF) dieser (Leistungs-) Signale, so erhält man mit Gleichung (1.14):^{3.1}

$R_{cc}(\tau) = c(\tau) * c(\tau) = c(-\tau) * c(\tau)$	AKF der Symbole	(3.2)
$R_{dd}(\tau) = d(\tau) * d(\tau) = d(-\tau) * d(\tau)$	AKF der Daten	
$R_{ss}(\tau) = s(\tau) * s(\tau) = s(-\tau) * s(\tau)$	AKF des Symbol-Filters	

Die AKF der Ausgangsgröße $R_{cc}(\tau)$ ist über Gleichung (3.1) mit den AKFs $R_{dd}(\tau)$ und $R_{ss}(\tau)$ verknüpft. Für die Umformung werden zunächst die Ausdrücke mit der **Korrelation** (Symbol $*$) **durch die Faltung** (Symbol $*$) **ersetzt**, da diese sowohl kommutativ als auch assoziativ ist.

$$\begin{aligned}
 R_{cc}(\tau) &= [d(-\tau) * s(-\tau)] * [d(\tau) * s(\tau)] \\
 &= [d(-\tau) * d(\tau)] * [s(-\tau) * s(\tau)] \\
 &= [d(\tau) * d(\tau)] * [s(\tau) * s(\tau)]
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

$$\rightsquigarrow R_{cc}(\tau) = R_{dd}(\tau) * R_{ss}(\tau) \quad \text{AKF der Daten-Symbole} \tag{3.4}$$

- Die AKF $R_{cc}(\tau)$ der Daten-Symbole ergibt sich damit aus der Faltung der AKF $R_{dd}(\tau)$ der Daten mit der AKF $R_{ss}(\tau)$ des Symbol-Filters bzw. der Symbol-Form.

^{3.1}Siehe hierzu: Skript „Signale und Systeme“, Abschnitt 6.4: „Korrelation und LTI-Systeme“.

Nach dem Satz von Einstein–Wiener–Chintchine^{3.2} ist das Leistungs–Dichte–Spektrum (PSD *power spectrum density*) die Fourier–Transformierte der AKF. Damit wird:

$$S_{cc}(\omega) = S_{dd}(\omega) \cdot S_{ss}(\omega) \quad \text{PSD der Daten-Symbole} \quad (3.5)$$

- Daraus folgt, daß sich das **Leistungs–Dichte–Spektrum der Symbole** $S_{cc}(\omega)$ aus dem **Produkt des Leistungs–Dichte–Spektrums der Daten** $S_{dd}(\omega)$ und dem **Leistungs–Dichte–Spektrum der Symbol-Form** $S_{ss}(\omega)$ ergibt.

3.1 Daten mit statistischer Unabhängigkeit

Sind die Daten statistisch von einander unabhängig, so ist deren AKF δ -förmig.

$$R_{dd}(\tau) = \delta(\tau) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad S_{dd}(\omega) = 1 \quad (3.6)$$

Deren Leistungs–Dichte–Spektrum ist daher konstant, $S_{dd}(\omega) = 1$. Damit ist das **Leistungs–Dichte–Spektrum der Symbole** $S_{cc}(\omega)$ **nur durch das Symbol-Filter festgelegt**, wobei $H_s(\omega)$ die Übertragungsfunktion des Symbol-Filters ist.

$$S_{cc}(\omega) = S_{ss}(\omega) = H_s^*(\omega) \cdot H_s(\omega) = |H_s(\omega)|^2 \quad \text{PSD für statistisch unabhängige Daten} \quad (3.7)$$

Für unverschmälerte (\square förmige) Datensymbole $\square_{T/2}(t)$ ergibt sich (bei statistischer Unabhängigkeit der Daten) somit ein Leistungs–Dichte–Spektrum $P(\omega)$, Bild 3.1.

$$P(\omega) = \left\{ \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right\}^2 \quad (3.8)$$

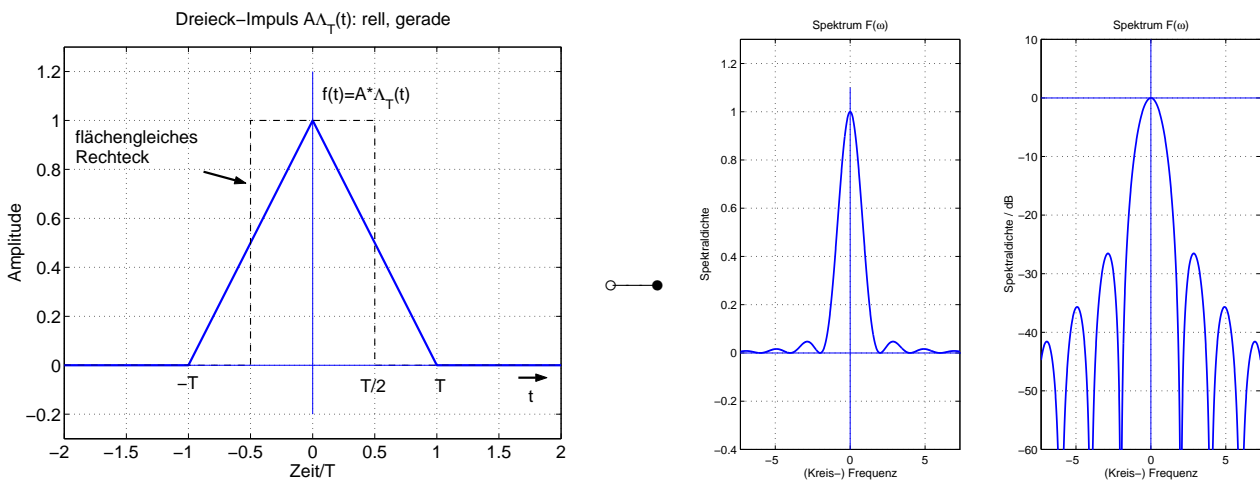


Bild 3.1: Die Autokorrelations–Funktion (statt t lies τ) und die Spektrale Leistungs–Dichte von rechteckförmigen Daten–Symbolen (\square Symbolform), die statistisch von einander unabhängig sind. (lineare und logarithmische Darstellung)

3.2 Beispiele für Daten mit statistischer Abhängigkeit

Die im Abschnitt 2 in Bild 2.1 (Seite 15) dargestellten Leitungs–Codes sind Beispiele für korrelierte Daten. Da die dort dargestellten Symbole nicht verrundet sind, müßten deren Leistungs–Dichte–Spektrern in ihrer Form stets gemäß $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$ sein, wenn keine Korrelation vorliegen würde.

Aus den in Bild 2.1 dargestellten Leistungs–Dichte–Spektrern geht jedoch hervor, daß hier offensichtlich statistische Abhängigkeiten vorliegen.

^{3.2}Siehe „Signale und Systeme“, Abschnitt 6.5

3.2.1 Die Biphase-Level Codierung

Als Beispiel wird die BIPHASE-Level Codierung (Bi-Φ-L) aus Bild 2.1 betrachtet (Symbole der Breite T). Diese kann

1. entweder als BIPHASE Symbol $f_{bp}(t)$ komplett analysiert werden mit ansonsten von einander statistisch unabhängigen Daten oder
2. als $\square_{T/4}(t)$ Bit (d.h. \square -Symbol) mit der Vorschrift, daß dann unmittelbar ein weiteres Bit mit $-\square_{T/4}(t)$ zu folgen hat.

Die beiden unterschiedlichen Wege führen auf das gleiche Ergebnis, wodurch eine Kontrollmöglichkeit gegeben ist.

Zunächst wird der **1. Weg** besprochen. Für das (gesamte) BIPHASE Symbol $f_{bp}(t)$ gilt:^{3.3}

$$f_{bp}(t) = \square_{T/4}(t + \frac{T}{4}) - \square_{T/4}(t - \frac{T}{4}) \quad \circ \bullet \quad jT \frac{[\sin(\omega T/4)]^2}{\omega T/4} = F_{bp}(\omega) = H_s(\omega) \quad (3.9)$$

Mit Gleichung (3.7) wird daraus das Leitungs-Dichte-Spektrum der BIPHASE-Symbole:

$$S_{cc}(\omega) = H_s^*(\omega) \cdot H_s(\omega) = \left\{ T \frac{[\sin(\omega T/4)]^2}{\omega T/4} \right\}^2 \quad (3.10)$$

Beim **2. Weg** wird die Bit-Form (hier: $s(t) = \square_{T/4}(t)$) und die **statistische Abhängigkeit** bzw. Verknüpfung (hier: $d(t) = \delta_{T/4}(t + \frac{T}{4}) - \delta_{T/4}(t - \frac{T}{4})$) getrennt untersucht. Damit gilt:

$$f_{bp}(t) = c(t) = s(t) * d(t) = \underbrace{\square_{T/4}(t)}_{\text{Form}} * \underbrace{\left\{ \delta(t + \frac{T}{4}) - \delta(t - \frac{T}{4}) \right\}}_{\text{statistische Abhängigkeit}} \quad (3.11)$$

In Bild 3.2 sind die BIPHASE Daten als Pin \bullet eingetragen. Dabei sind für die Zeitverschiebung $\tau = 0$ zusätzlich die zugehörigen \square -Symbole gezeichnet. Da die Daten zeitdiskret sind, können sie immer nur in Schritten von $T/2$ verschoben werden. In den gezeichneten Positionen ($\tau = [-T/2, 0, T/2]$) gibt es Überlappungen, so daß die AKF der Daten hier $\neq 0$ ist. Die AKF ist ebenfalls zeitdiskret und besteht aus 3 Pin.

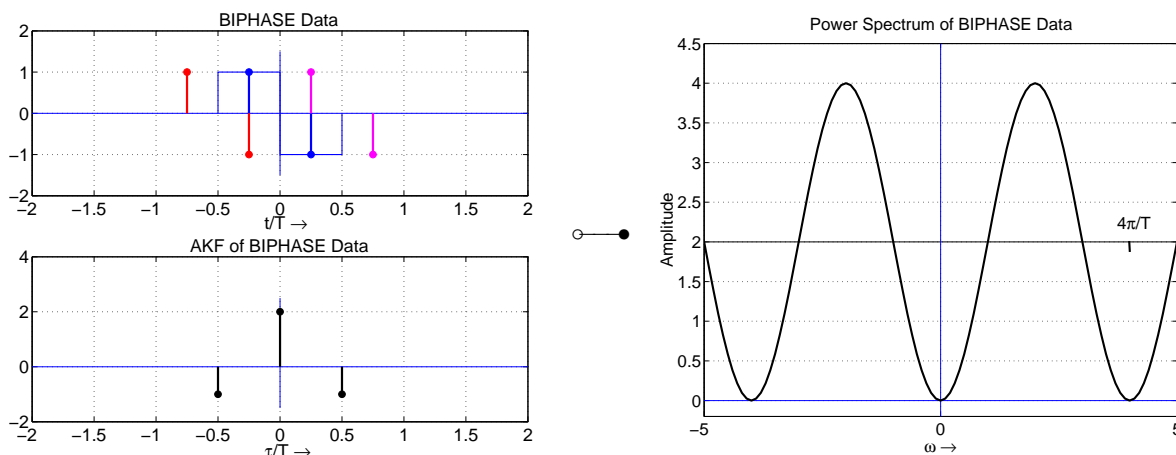


Bild 3.2: BIPHASE Daten, deren AKF $R_{dd}(\tau)$ und Spektrale Leistungs-Dichte $S_{dd}(\omega)$

Die Gewinnung der AKF ist sehr einfach. Jede Übereinstimmung gibt einen Wert von 1. Jede negative Übereinstimmung ergibt -1 . Keine Übereinstimmung ergibt 0. Für jede der diskreten Verschiebungs-Positionen ist die Summe der Werte aufzutragen. Hieraus ergibt sich die AKF $R_{dd}(\tau)$. Formelmäßig werden diese Pins nun als δ behandelt. Damit folgt für die Spektrale Leistungs-Dichte der BIPHASE Daten, Bild 3.2 (rechts):

^{3.3}Siehe hierzu im Skript „Signale und Systeme“ die entsprechende Korrespondenz im 2. Kapitel der „Anwendungen der Fourier-Transformation“.

$$R_{dd}(\tau) = -\delta(\tau + T/2) + 2\delta(\tau) - \delta(\tau - T/2) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad 2[1 - \cos(\omega T/2)] = 4 \sin(\omega T/4)^2 = S_{dd}(\omega) \quad (3.12)$$

Die Bit–Form $s(t) = \square_{T/4}(t)$ hat als AKF $R_{ss}(\tau)$ ein Dreieck. Daraus folgt als Fourier–Transformierte $S_{ss}(\omega)$:

$$S_{ss}(\omega) = \left(\frac{T}{2}\right)^2 \left(\frac{\sin(\omega T/4)}{\omega T/4}\right)^2 \quad (3.13)$$

Mit Gleichung (3.5) wird damit:

$$S_{cc}(\omega) = S_{dd}(\omega) \cdot S_{ss}(\omega) = \left(\frac{T}{2}\right)^2 \left(\frac{\sin(\omega T/4)}{\omega T/4}\right)^2 \cdot 4 \sin(\omega T/4)^2 = \left\{ T \frac{[\sin(\omega T/4)]^2}{\omega T/4} \right\}^2 \quad (3.14)$$

Dies stimmt überein mit Gleichung (3.10). Damit ist an diesem Beispiel gezeigt, auf welchem Weg man zu den Leistungs–Dichte–Spektren von codierten Daten bzw. Symbolen kommen kann.

Das Leistungs–Dichte–Spektrum der unverrundeten BIPHASE Symbole ist in Bild 3.3 dargestellt.

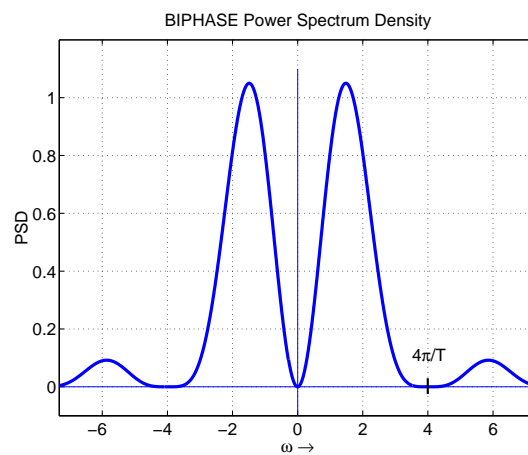


Bild 3.3: Das Leistungs–Dichte Spektrum der unverrundeten Biphase Symbole

4 Partial–Response–Verfahren

Im ersten Kapitel wurde (als Beispiel) eine Cos–förmige Symbol–Form gewählt, die zeitlich genau so lange dauert wie die (unverrundeten) Bits. Dies ist insofern ein vernünftiger Ansatz, weil damit der Empfänger Symbol für Symbol seine Entscheidung treffen kann und (bei ungestörtem Kanal) keine Fehler–Fortpflanzung entsteht.

Es zeigt sich aber, daß sich bei geeigneter teilweiser Überlappung der Symbole eine höhere Datenrate übertragen läßt, womit man zu den Partial–Response–Verfahren kommt. Der Vorteil der höheren Datenrate ist jedoch nicht „kostenlos“ zu erhalten. Die Überlappung führt nämlich dazu, daß sich **höherstufige Symbole** (mehr als 2 Stufen) ergeben. Dadurch reduziert sich die zulässige Rauschleistung (allgemein: Störleistung), wenn die gleiche Bitfehler–Rate wie für eine Binär–Übertragung gefordert ist.

Allgemein wird eine (ungewollte) Überlappung von Daten–Symbolen mit „Inter–Symbol–Interferenz“ (ISI) bezeichnet^{4.1}. **Partial–Response stellt demgegenüber eine gewollte (absichtliche) ISI dar.**

Außerdem kann die Partial–Response–Codierung gleichzeitig auch zur **Formung der Spektralen Leistungs–Dichte des Datenstromes** verwendet werden.

Als Beispiele werden die „Duobinary Codierung“ (Klasse 2) und die „Pseudo Ternär Codierung“ (Klasse 4) behandelt. Der Name „Codierung“ weist darauf hin, daß die Überlappung der Symbole systematisch erfolgen muß, damit der Empfänger diese wieder trennen kann.

^{4.1}Dies Themenstellung wird im Kapitel DFS 3: INV „Inter–Symbol–Interferenz, ...“ ausführlich behandelt

4.1 Duobinary-Codierung

Das äquivalente Blockschaltbild dieses Verfahrens (auch: Doubinary Typ 2)^{4.2} zeigt Bild 4.1. Es besteht aus der Kettenschaltung eines Digitalen Filters und eines Idealen Tiefpasses.

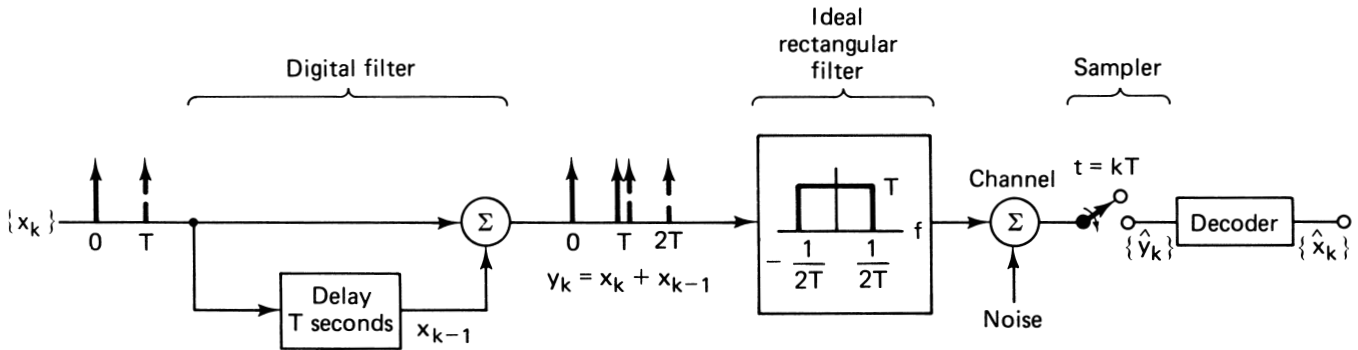


Bild 4.1: Blockschaltbild der Duobinary Codierung (Klasse 2)

Wie man sofort erkennt, hat das Digitale Filter eine (periodische) Cos-förmige Übertragungsfunktion. Zusammen mit dem Idealen Tiefpaß ergibt sich resultierend eine Cos-Kuppe als Übertragungsfunktion, Bild 4.2.

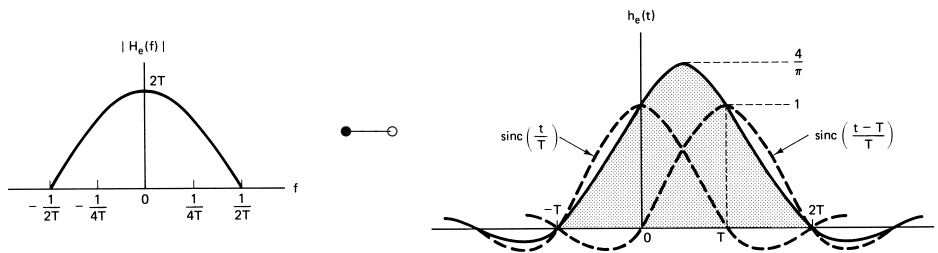


Bild 4.2: Übertragungsfunktion (Betrag) und Impulsantwort des Duobinary-Verfahrens Klasse 2

Aufgrund des Blockschaltbildes 4.1 ist zu erkennen, daß die gemäß Duobinary geformten Symbole identisch mit der Impulsantwort in Bild 4.2 sind.

4.1.1 Der Gleichanteil

Als Nachteil dieser Codierung stellt man fest, daß die so geformten Symbole **nicht Gleichanteils-frei** sind.

Ein Gleichanteils-freies Symbol erhält man nur dann, wenn die (nicht kausale) Impulsantwort des Digitalen Filters eine reell ungerade Symmetrie aufweist. Dann ist die Übertragungsfunktion imaginär ungerade und hat dadurch eine Nullstelle bei $\omega = 0$. Diese Nullstelle bleibt erhalten, wenn mit der Übertragungsfunktion des idealen Tiefpasses multipliziert wird.

Im Beispiel ist die nichtkausale, symmetrierte Impulsantwort $h_{D_{\text{symm}}}(t)$ des digitalen Filters:

$$h_{D_{\text{symm}}}(t) = \delta(t + T/2) + \delta(t - T/2) \quad \rightsquigarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} h_{D_{\text{symm}}}(t) dt = 2 \tag{4.1}$$

Die Fläche von $h_{D_{\text{symm}}}(t)$ ist damit 2. Folglich wird nach dem Satz über die Zentralordinate:

$$H_D(0) = 2 \tag{4.2}$$

Bei den Digitalen Filtern ist es üblich, die δ durch δ mit einem Punkt über dem δ zu ersetzen. Die Fläche der δ wird damit zu den Koeffizienten a_k der δ .

^{4.2}Vergleiche hierzu die differentielle Codierung im Skript Digitale Modulations-Verfahren.

Damit folgt für die Vorschrift für ein Digitales Filter, mit dem **Gleichanteils-freie Symbole** erzeugt werden können:

$$\sum_k a_k = 0 \tag{4.3}$$

4.1.2 Codierung und Decodierung

Es wird ein bipolares Datensignal am Eingang des Systems (Bild 4.1) angenommen:

- logisch 1 : $\delta(t)$ (bzw. \uparrow) $\rightarrow +1$
- logisch 0 : $-\delta(t)$ (bzw. $-\uparrow$) $\rightarrow -1$

Variable k :	-1	0	1	2	3	4	5
logische Werte x_k :	0	0	1	0	1	1	0
Amplituden der \uparrow :	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1
Verknüpfungsregel: $y_k = x_k + x_{k-1}$	-2	0	0	0	0	2	0

Aus der Tabelle erkennt man die Decodier-Regeln:

- Für $y_k = 2$ entscheide: $x_k = +1$
- Für $y_k = -2$ entscheide: $x_k = -1$
- Für $y_k = 0$ entscheide: das Gegenteil der vorherigen Entscheidung

Die letzte Regel zeigt die Schwachstelle des Verfahrens auf. Ist einmal ein Fehler passiert, ist das Gegenteil dazu bei der nächsten Entscheidung eben wieder ein Fehler. Somit können sich hier **Fehler fortpflanzen**.

4.1.3 Pre-Codierung

Um die Fehlerfortpflanzung zu verhindern, wird eine Vor-Codierung (pre coding) angewendet. Damit erhält man ein Blockschaltbild gemäß Bild 4.3.

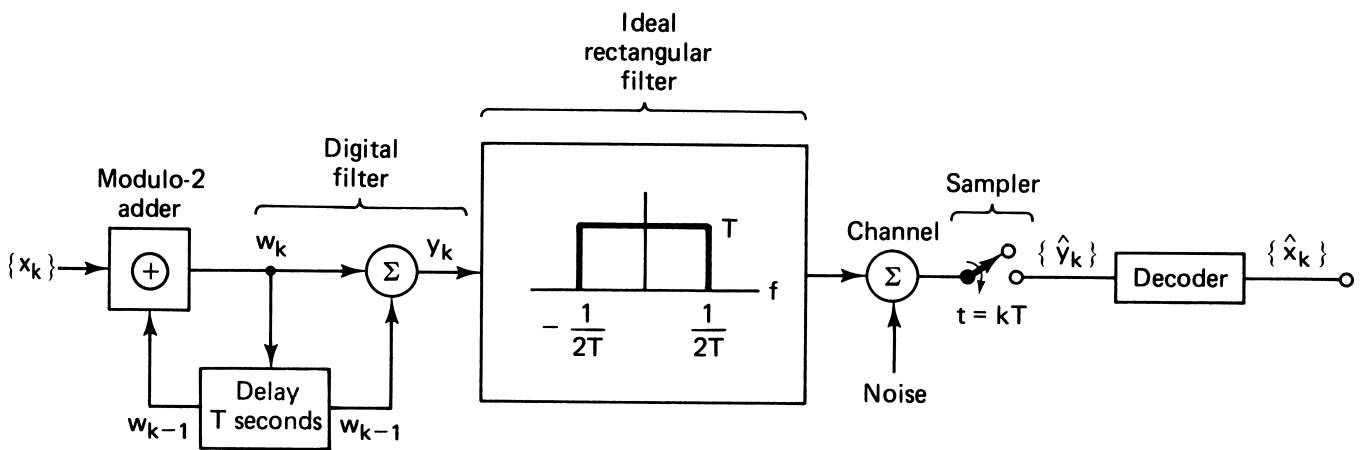


Bild 4.3: Blockschaltbild der Duobinary Codierung mit Pre-Codierung

Daß diese Vor-Codierung die gewünschte Unabhängigkeit erbringt, sieht man sofort aus der folgenden Tabelle.

Variable k :	-1	0	1	2	3	4	5
logische Werte x_k :	0	0	1	0	1	1	0
pre-codierte Werte: $w_k = x_k \oplus w_{k-1}$	0	0	1	1	0	1	1
Amplituden der \uparrow :	-1	-1	+1	+1	-1	+1	+1
Verknüpfungsregel: $y_k = w_k + w_{k-1}$	-2	0	+2	0	0	0	+2

Die Decodier-Regel lautet somit:

- Für $y_k = \pm 2$ entscheide daß $x_k = \text{binär } 0$
- Für $y_k = 0$ entscheide daß $x_k = \text{binär } 1$

Wie man sieht, ist damit die Fehlerfortpflanzung unterdrückt.

4.2 Pseudo-Ternär-Codierung

Das Blockschaltbild für die Pseudo-Ternär-Codierung (auch: Duobinary Typ 4) enthält gleich den passenden Pre-Encoder zur Vermeidung der Fehlerfortpflanzung, Bild 4.4.^{4.3}

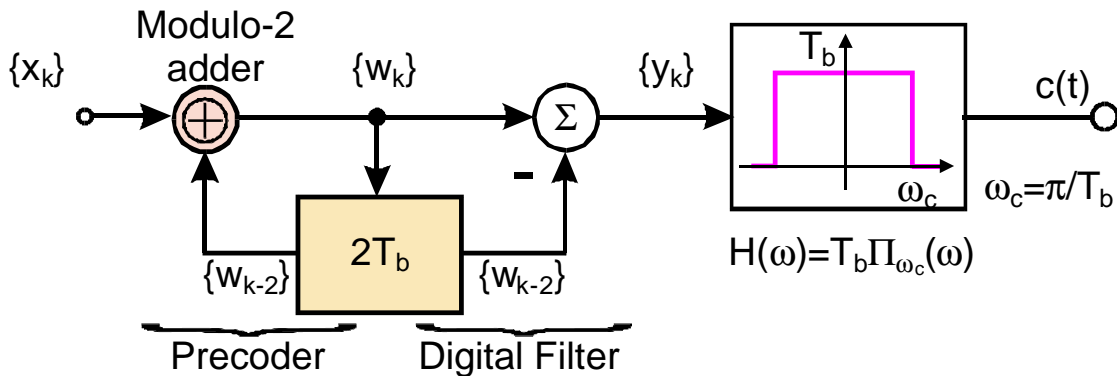


Bild 4.4: Blockschaltbild der Pseudo Ternär Codierung mit Pre-Codierung

Der Verzögerer (Delay) verzögert hier die Zeit $2T_b$ (2 Bit-Dauern) und das digitale Filter subtrahiert das verzögerte Bit. Das digitale Filter hat damit die Koeffizienten $\{1, 0, -1\} \rightsquigarrow \sum_k a_k = 0$. Damit besteht die Impulsantwort des Digitalen Filters aus 2 antiparallelen δ -Impulsen (reell, ungerade) und seine Übertragungsfunktion wird Sin-förmig (imaginär, ungerade). Durch die Begrenzung auf $\pm\omega_c = \pm\pi/T_b$ wird die gesamte Übertragungsfunktion zu einer einzelnen Periode einer Sin-Kurve (imaginär, ungerade). Als Impulsantwort — und damit als Symbol-Form — ergibt sich die Überlagerung von 2 $\frac{\sin(x)}{x}$ Kurven, Bild 4.5.

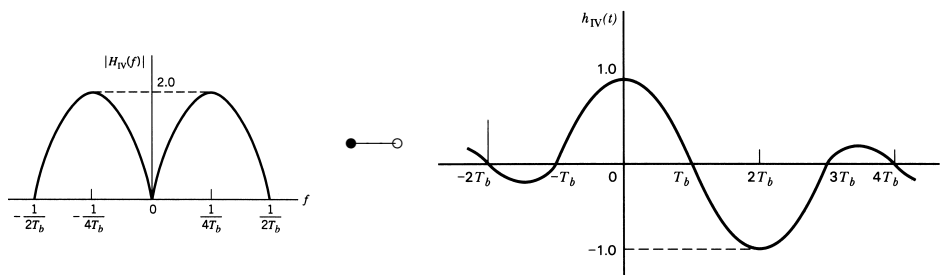


Bild 4.5: Übertragungsfunktion (Betrag) und Impulsantwort des Duobinary-Verfahrens Klasse 4 (pseudo ternär)

Aus Bild 4.5 ist weiterhin deutlich erkennbar, daß zusätzlich zu der gewollten ISI noch eine ungewollte ISI auftritt, denn die Symbole haben Ausläufer (und Neben-Maxima), die weiter andauern, als es der Verknüpfung durch den Pre-Coder und das transversale Filter entspricht. Diese Problemstellung wird im Teil DFS 3: INV behandelt.

Vorteilhaft an dieser Codierung ist, daß hier die Symbole Gleichanteils-frei sind. Damit entsteht hier eine (oftmals) gewünschte spektrale Formung der Spektralen Leistungsdichte des Datenstroms.

^{4.3}Das Blockschaltbild enthält eine zeichnerische Vereinfachung: Der Pre-Coder arbeitet mit **unipolaren** Daten, daher auch der Modulo-2 Addierer (EXOR), während für das digitale Filter **bipolare** Daten vorgesehen sind, daher der Subtrahierer (Σ).

Literatur

- [1] Sklar, B.: *Digital Communications, Fundamentals and Applications*, Prentice Hall, 2nd ed. 2001
- [2] Sklar, B.: *Digital Communications, Fundamentals and Applications*, Prentice Hall, 1988
- [3] Blahut, R. E.: *Digital Transmission of Information*, Addison Wesley, 1990
- [4] Lee, E. A.; Messerschmitt, D. G.: *Digital Communication*, Kluwer Academic Publishers, 1988
- [5] Sheingold, D. H. (Editor): *Analog–Digital Conversion Handbook*, Prentice–Hall, 1986
- [6] Carlson, A. B.: *Communication Systems, An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication*, McGraw Hill, 3rd. Ed. 1986
- [7] Haykin, S.; *Communication Systems*, Wiley, 4th ed. 2001
- [8] Haykin, S.; *Communication Systems*, Wiley, 3rd ed. 1994
- [9] Bracewell, R.N.: *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw Hill, 2nd ed. rev. 1986
- [10] Zeller, V.: *Grundlagen der Q–Faktormessung*, Acterna Eningen GmbH, <http://www.acterna.com>