

# Bandpaß-Systeme

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Der äquivalente Tiefpaß</b>	<b>1</b>
1.0.1 Realisierung von Bandpässen im Basisband als Tiefpässe	1
1.1 Der symmetrische Bandpaß	2
1.2 Die Impulsantwort des symmetrischen Bandpasses	2
1.3 Realisierung des symmetrischen Bandpasses mit Hilfe äquivalenter Tiefpässe	3
<b>2 Der unsymmetrische Bandpaß</b>	<b>4</b>
2.1 Die Impulsantwort des unsymmetrischen Bandpasses	7
2.2 Die Realisierung des unsymmetrischen Bandpasses mit Hilfe äquivalenter Tiefpässe	7
2.2.1 Komplexe Faltung zur I/Q Filterung im Tiefpaß-Bereich	8
2.3 Realisierung eines linearphasigen unsymmetrischen Bandpaß Systems mit Hilfe von äquivalenten Tiefpässen	8
2.4 Der linearphasige unsymmetrische Bandpaß mit Nyquistflanke	9
<b>3 Abtast-Theorem für Bandpaß-Signale</b>	<b>11</b>
3.1 Nyquist-Bedingung für I/Q Bandpaß-Abtastung	11
3.2 Abtastraten-Erhöhung durch Taktverschiebung	13
3.3 Digitale Realisierung der Multiplizierer	13

## Abbildungsverzeichnis

1.1 Durchlaßkurven eines (symmetrischen) Bandpasses und des zugehörigen äquivalenten Tiefpasses	1
1.2 Die Impulsantwort des idealen Bandpasses und die des zugehörigen äquivalenten Tiefpasses (Teile bei negativen Frequenzen nicht dargestellt)	2
1.3 Die gewünschte Bandpaß-Filterung	3
1.4 Realisierung eines symmetrischen Bandpasses durch Tiefpässe	3
1.5 Die Spektralverteilung an den Punkten (1) bis (7) der Struktur Bild 1.4	4
2.1 Unsymmetrischer Bandpaß in kartesischer Darstellung	5
2.2 Zerlegung des Real- und Imaginärteils des unsymmetrischen BP-Systems in gerade und ungerade Anteile	6
2.3 Bandpaß – Tiefpaß – Transformation für die Anteile des unsymmetrischen Bandpasses	6
2.4 Erzeugung des unsymmetrischen Bandpasses mit Hilfe von Tiefpaß-Systemen	7
2.5 I/Q Filterung im Tiefpaß-Bereich als komplexe Faltung	8
2.6 Erzeugung des unsymmetrischen Bandpasses mit linearer Phase	9
2.7 Linearphasiges Bandpaß-System beim Fernsehen und die beiden äquivalenten Tiefpässe $H_p$ (TP) und $H_q$ (HTP)	9
2.8 Beispiele für die Übertragung von Helligkeitssprüngen beim analogen Fernsehen	10
2.9 Prinzip des SAW-Filters und Maske eines steiflankigen SAW-Filters	10
3.1 Struktur für die Nachbildung eines linearphasigen Bandpasses mit Abtastung in der Tiefpaß-Ebene	11
3.2 Spektren bei (idealer) Bandpaß-Abtastung mit I/Q Delta-Kämmen	12
3.3 Zur Gewinnung des Wertes für die Abtastfrequenz $\omega_{ABP}$ wenn die Lücke kein ganzzahliges (ungerades) Verhältnis der Bandbreite des BP-Signals beträgt.	12

## Bandpaß-Systeme

### 1 Der äquivalente Tiefpaß

Die rechnerische Behandlung von Bandpaß-Systemen erfolgt als *äquivalente Tiefpaß-Systeme*. Ist der Bandpaß symmetrisch bezüglich seiner Mittenfrequenz  $\omega_0$ , geschieht dies dadurch, daß die Durchlaßkurven des Bandpasses zur Frequenz Null hin verschoben werden, Bild 1.1.

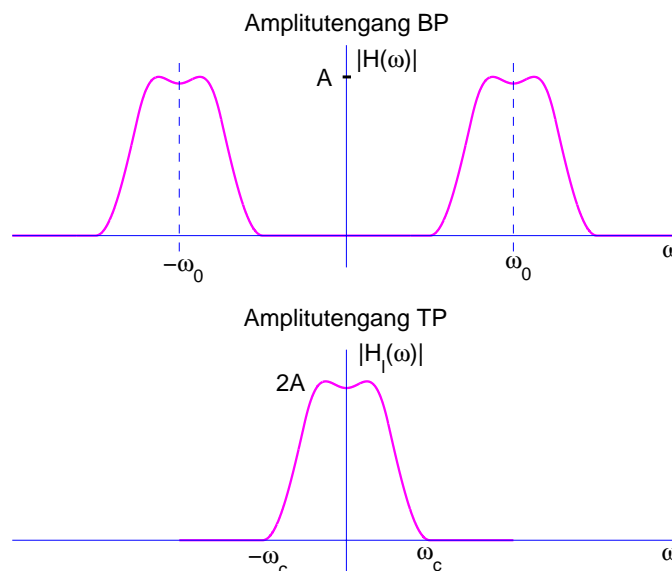


Bild 1.1: Durchlaßkurven eines (symmetrischen) Bandpasses und des zugehörigen äquivalenten Tiefpasses

#### 1.0.1 Realisierung von Bandpassen im Basisband als Tiefpässe

Durch diese Verschiebung ist man in der Lage, die für die Tiefpässe gefundenen Zusammenhänge direkt auf die Bandpässe anwenden zu können. Es ergibt sich aber noch ein zusätzlicher Vorteil. Während man für Anwendungen in der *Hochfrequenztechnik* Filter mit Hilfe von Reaktanzen, gekoppelten Schwingkreisen, Streifenleitern oder Hohlleitern realisiert, werden viele aufwendige Filteraufgaben in der Nachrichtentechnik mit *digitaler Signalverarbeitung* mit Hilfe von Signalprozessoren gelöst.

Da die *Rechenleistungen* für digitale Filter meist sehr groß sind, können digital oft nur Tiefpässe (TP), jedoch keine Bandpässe (BP) realisiert werden. Die Rechenleistung steigt mit der Mittenfrequenz des Filters — bedingt durch die Forderungen aus dem Abtasttheorem — und den Anforderungen an die Flankensteilheit, die Sperrdämpfung und die Laufzeit.

Als Lösungsmöglichkeit bleibt dann, die zu dem Bandpaß gehörenden *äquivalenten Tiefpässe* zu realisieren und die Durchlaßeigenschaften in den Bandpaßbereich zu transformieren. Damit ergibt sich für diese *Bandpaß - Tiefpaß - Transformation* ein weites Anwendungsgebiet in der modernen Nachrichtentechnik.

Diese Art der BP-TP-Transformation unterscheidet sich von derjenigen, die für analoge Filter üblich ist, welche sich auf eine Variablen-Transformation beschränkt. Für die hier betrachtete BP-TP-Transformation werden für einen symmetrischen Bandpaß 2 Tiefpässe benötigt und für einen unsymmetrischen insgesamt 4 Stück. Zusätzlich sind noch 4 Multiplizierer (oder DSB Modulatoren) und mehrere Addierer erforderlich. Voraussetzung für diese Transformation ist, daß die Breite  $\omega_c$  des äquivalenten TP kleiner als die Mittenfrequenz  $\omega_0$  des BP ist, also

$$\text{Grenzfrequenz des äq. TP } \omega_c \leq \omega_0 \text{ Mittenfrequenz des BP.} \quad (1.1)$$

## 1.1 Der symmetrische Bandpaß

Die Bandpaß – Tiefpaß – Transformation wird hier sehr einfach, insbesondere dann, wenn man zunächst die Laufzeit zu Null  $t_{\text{ph}} = t_{\text{gr}} = 0$  annimmt. Mit Laufzeit  $t_{\text{ph}} = 0$  ist dann auch die Phase  $\Theta = 0$  und das System nicht kausal.

Die Bedingungen für die Symmetrie eines Bandpasses sind:

1. Die Durchlaßkurve muß bezüglich der Mittenfrequenz  $\pm\omega_0$  jeweils *spiegelsymmetrisch* sein, wie es beispielsweise Bild 1.1 zeigt.  
Bezüglich der Frequenz  $\omega = 0$  liegt in jedem Fall (also auch dann, wenn die Durchlaßkurven des BP unsymmetrisch bezüglich  $\omega_0$  sind) eine Symmetrie vor, da die Impulsantwort  $h(t)$  des Bandpasses reell ist.
2. Die Phase  $\Theta(\omega)$  muß jeweils *punktsymmetrisch* bezüglich der Mittenfrequenz  $\pm\omega_0$  sein, woraus folgt, daß die Gruppen-Laufzeit  $t_{\text{gr}}(\omega)$  gerade bezüglich der Mittenfrequenz  $\pm\omega_0$  sein muß.
3. Der Bandpaß mit symmetrischer Durchlaßkurve und Laufzeitkurve muß auch *symmetrisch betrieben* werden, was bedeutet, daß der Hochfrequenz-Träger des Bandpaß-Signals eine Frequenz  $\Omega_C = \omega_0$  haben muß.

Wird diese 3. Bedingung nicht eingehalten, so ergeben die um  $\pm\Omega_C$  verschobenen Anteile des Bandpasses keinen *gemeinsamen* äquivalenten Tiefpaß. Tatsächlich ist die unvollständige Überlappung der beiden äquivalenten Tiefpässe das Kennzeichen für ein unsymmetrisches Bandpaßsystem.

## 1.2 Die Impulsantwort des symmetrischen Bandpasses

Bild 1.2 zeigt den Zusammenhang zwischen Band-Paß und äquivalentem Tief-Paß unter Berücksichtigung einer linearen Phase für den symmetrischen Bandpaß. Die Zentralordinate der Impulsantwort  $h(t)$  folgt aus der Fläche der (beiden) Rechtecke von  $H(\omega)$ . Die Rechteckform kann als *flächengleiches Rechteck* für eine tatsächliche Durchlaßkurve aufgefaßt werden.

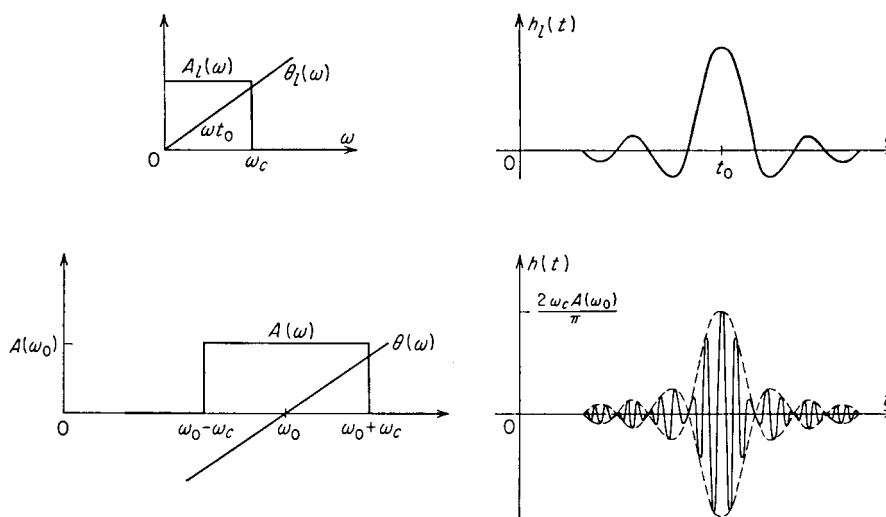


Bild 1.2: Die Impulsantwort des idealen Bandpasses und die des zugehörigen äquivalenten Tiefpasses (Teile bei negativen Frequenzen nicht dargestellt)

Zur Vereinfachung der Rechnung verwendet man einen *idealen Bandpaß* mit Phase  $\Theta = 0$ . Die Vernachlässigung der Phasendrehung führt auf dabei nicht kausale Impulsantworten. Formelmäßig gilt damit, wenn  $H(\omega)$  die ÜTF des BP und  $h(t)$  seine Impulsantwort ist, sowie  $H_l(\omega)$  die ÜTF des äquivalenten TP und  $h_l(t)$  dessen Impulsantwort bedeutet:

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \underbrace{A \Pi_{\omega_c}(\omega - \omega_0)}_{\frac{1}{2} H_I(\omega - \omega_0)} + \underbrace{A \Pi_{\omega_c}(\omega + \omega_0)}_{\frac{1}{2} H_I(\omega + \omega_0)} = \underbrace{2A \Pi_{\omega_c}(\omega)}_{H_I(\omega)} \overset{\left\{ \frac{1}{2\pi} \right\}}{*} \pi \{ \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \} \\
 h(t) &= \dots = \underbrace{\frac{2A\omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t}}_{h_I(t)} \cdot \cos(\omega_0 t) = h_I(t) \cdot \cos(\omega_0 t)
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Das Ergebnis aus Bild 1.2 kann damit so zusammengefaßt werden:

- Die Impulsantwort  $h(t)$  des symmetrischen Bandpasses ist gleich der Impulsantwort  $h_I(t)$  des äquivalenten Tiefpasses, welche mit einer Cos-Schwingung mit der Mittenfrequenz  $\omega_0$  multipliziert ist.

$$h_I(t) \cdot \cos(\omega_0 t) = \begin{matrix} h_I(t) & \text{---} \bullet & H_I(\omega) \\ h(t) & \text{---} \bullet & H(\omega) \end{matrix} = \frac{1}{2} \{ H_I(\omega - \omega_0) + H_I(\omega + \omega_0) \} \tag{1.3}$$

### 1.3 Realisierung des symmetrischen Bandpasses mit Hilfe äquivalenter Tiefpässe

Die Herleitung erfolgt graphisch. Im Beispiel soll ein dreiecksförmiges Eingangsspektrum  $U_e(\omega)$  mit einem idealen Bandpaß ( $\Pi$ -Form) gefiltert werden, Bild 1.3. Die Form des Eingangsspektrums  $U_e(\omega)$  ist *symbolisch* zu verstehen, ähnlich zur *Schmetterlings-Form* des Spektrums bei den Modulationen.

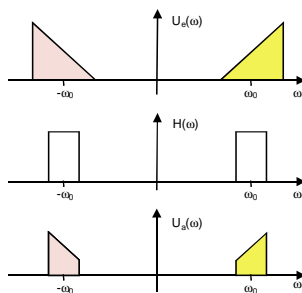


Bild 1.3: Die gewünschte Bandpaß-Filterung

Für die Realisierung eines Bandpasses mit Hilfe äquivalenter Tiefpässe ist eine zweifache Umsetzung erforderlich, da zunächst vom BP zum TP transformiert wird und dann vom TP zurück zum BP.

- Bandpaß  $\Rightarrow$  Tiefpaß  $\Rightarrow$  Bandpaß

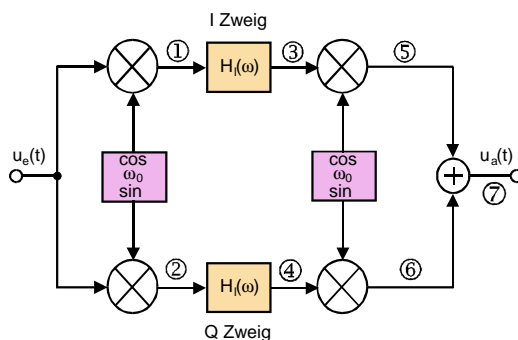


Bild 1.4: Realisierung eines symmetrischen Bandpasses durch Tiefpässe

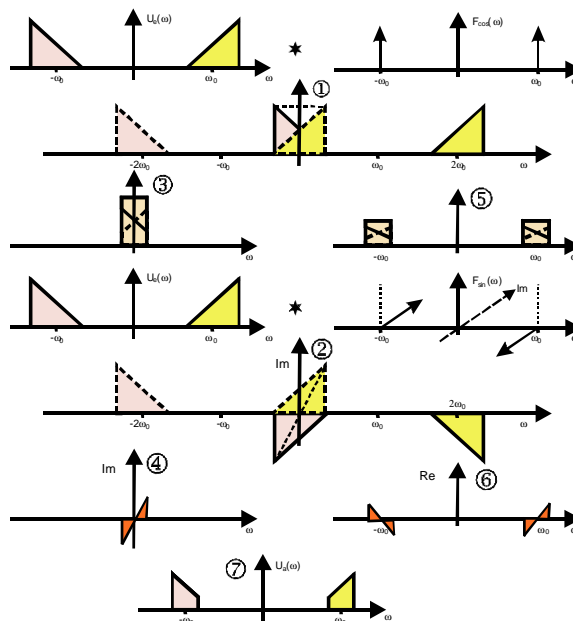


Bild 1.5: Die Spektralverteilung an den Punkten (1) bis (7) der Struktur Bild 1.4

Für symmetrische Bandpässe gelingt diese Umsetzung mit Hilfe der Struktur in Bild 1.4, wie man sofort anhand der Spektralverteilungen an den Punkten (1) bis (7) erkennt, Bild 1.5.

Aus der Struktur Bild 1.4 und der Spektralverteilung an den Punkten (1) bis (7) Bild 1.5 erkennt man folgende Eigenschaften und Bedingungen:

- Man benötigt einen Inphasen- und einen Quadratur-Zweig (I & Q), da beim Übergang von der Bandpaßlage in die Tiefpaßlage im I-Zweig eine *spektrale Überlappung* entsteht, die durch den Q-Zweig kompensiert werden muß.<sup>1</sup>
- Beide Tiefpässe müssen exakt gleich sein.  
Bei einer Realisierung im Signalprozessor kann dafür ein Tiefpaß im Time-Sharing-Verfahren benutzt werden.
- Die Phasenlage der Cos- bzw. Sin-Schwingung an den rechten Multiplizierern muß nicht notwendigerweise mit der an den linken Multiplizierern übereinstimmen.  
Es genügt, daß die Phasendifferenz der Träger zwischen I-Zweig und Q-Zweig jeweils  $90^\circ$  beträgt. Die rechten Multiplizierer können als *Modulatoren*, die linken als *Demodulatoren* bezeichnet werden.
- Durch Veränderung der Frequenz  $\omega_0$  der Umsetz-Oszillatoren kann die Mittenfrequenz des Bandpasses in weiten Grenzen variiert werden.
- Wird die Frequenz der Modulatoren zu  $\omega_1 \neq \omega_0$  gewählt, kann mit dieser Struktur gleichzeitig eine Frequenzumsetzung  $\omega_0 \rightarrow \omega_1$  durchgeführt werden.

## 2 Der unsymmetrische Bandpaß

Beim unsymmetrischen Bandpaß ist der Amplitudengang  $A(\omega)$  nicht gerade und die Phase  $\Theta(\omega)$  nicht ungerade jeweils bezüglich der Trägerfrequenz  $\Omega_C$  des modulierten Eingangssignals. Im Unterschied zum symmetrischen Bandpaß gibt es hier *keine eindeutig definierbare Mittenfrequenz*  $\omega_0$  des Bandpasses. Deshalb bezieht man sich jetzt auf die *Trägerfrequenz*  $\Omega_C$ .

<sup>1</sup>Dies ist ein ganz ähnlicher Fall wie bei der Erzeugung der Einseitenband-Modulation (SSB) nach der Phasenmethode. Die gleichen Verhältnisse ergeben sich, wenn ein Datensignal (z.B. 4-PSK) direkt demoduliert wird, ohne in eine Zwischenfrequenz zu gehen. Man benötigt auch dabei einen I- und einen Q-Demodulator.

Für die BP  $\rightarrow$  TP – Transformation ist die *kartesische Darstellung* (Real- und Imaginärteil) der Übertragungsfunktion besser geeignet als die *polare Darstellung* (Betrag und Phase)<sup>1</sup>.

Ein unsymmetrischer Bandpaß hat bezüglich der Mittenfrequenz  $\Omega_C$  keine Symmetrien, jedoch gelten bezüglich der Frequenz  $\omega = 0$  die Symmetrie-Eigenschaften:

- Realteil ist gerade
- Imaginärteil ist ungerade

Diese Symmetrie-Eigenschaften folgen aus der Bedingung, daß die Impulsantwort  $h(t)$  des BP – Systems reell ist. Bild 2.1 zeigt ein Beispiel für die kartesische Darstellung eines unsymmetrischen Bandpasses.

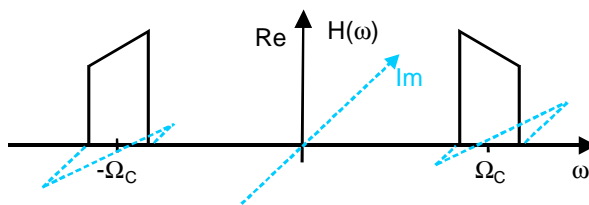


Bild 2.1: Unsymmetrischer Bandpaß in kartesischer Darstellung

Der unsymmetrische Bandpaß hat in kartesischer Darstellung einen *Realanteil* und einen *Imaginäranteil*, wie man sofort erkennen kann.

Für ein kausales System gilt für die Impulsantwort  $h(t)$ :

$$\begin{aligned} h(t) &= 0 \quad \text{für} \quad t \leq 0 \\ h(t) &= h_e(t) + h_o(t) \\ h_e(t) &= \frac{1}{2} \{h(t) + h(-t)\} \\ h_o(t) &= \frac{1}{2} \{h(t) - h(-t)\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Damit gilt für die Übertragungsfunktion  $H(\omega)$ :

$$h(t) = h_e(t) + h_o(t) \quad \longleftrightarrow \quad H(\omega) = H_e(\omega) + jH_o(\omega) \quad (2.2)$$

Mit dem *Parsevalschen Theorem* folgt daraus für die einzelnen Teile der Übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h_e(t)^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_e(\omega)^2 d\omega \\ \int_{-\infty}^{\infty} h_o(t)^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_o(\omega)^2 d\omega \end{aligned} \quad (2.3)$$

Wegen der Kausalität von  $h(t)$  sind die Anteile für  $t < 0$  für  $h_e(t)$  und  $h_o(t)$  bis auf das Vorzeichen gleich.  $h_e(t)$  und  $h_o(t)$  gehen daher über eine Hilbert-Transformation aus einander hervor. Somit gilt:

$$\begin{aligned} h_e(t)^2 &= h_o(t)^2 \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} H_e(\omega)^2 d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} H_o(\omega)^2 d\omega \neq 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Also hat die Übertragungsfunktion eines kausalen Systems immer einen *Real- & Imaginäranteil*.

Damit nun auf den unsymmetrischen Bandpaß die BP  $\rightarrow$  TP – Transformation wie beim symmetrischen BP-System angewendet werden kann, zerlegt man den Realanteil  $\Re\{H(\omega)\}$  und den Imaginärteil  $\Im\{H(\omega)\}$  in ihre *geraden & ungeraden Anteile* bezüglich der Mittenfrequenz  $\Omega_C$ , Bild 2.2.

Damit erhält man 4 Teil-Systeme:

$$\begin{aligned} \Re\{H(\omega)\} &= H_1(\omega) + H_2(\omega) && \text{reell \& gerade} \\ \Im\{H(\omega)\} &= H_3(\omega) + H_4(\omega) && \text{imaginär \& ungerade} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Aufgrund der Symmetrie-Eigenschaften in Gleichung (2.1) gelten für die zugehörigen Impulsantworten folgende Symmetrie-Eigenschaften:

<sup>1</sup>Meßtechnisch kann nur Betrag und Phase ermittelt werden.

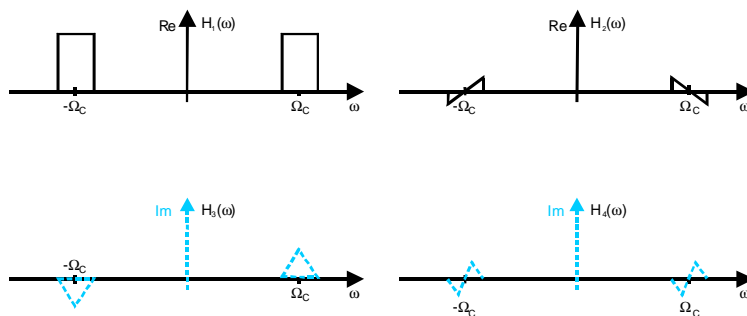


Bild 2.2: Zerlegung des Real- und Imaginärteils des unsymmetrischen BP-Systems in gerade und ungerade Anteile

- $h_1(t)$  und  $h_2(t)$  : reell & gerade
- $h_3(t)$  und  $h_4(t)$  : reell & ungerade

Damit nun die Impulsantwort des unsymmetrischen BP-Systems entsprechend zu der des symmetrischen BP-Systems als *modulierte Impulsantwort* der zugehörigen äquivalenten TP-Systeme dargestellt werden kann, werden die Anteile  $H_1(\omega)$  bis  $H_4(\omega)$  gemäß Bild 1.2 als *Faltung* der äquivalenten TP-Anteile  $H_{l_1}(\omega)$  bis  $H_{l_4}(\omega)$  mit jeweils zwei  $\delta$  Linien dargestellt. Hierbei hat man zur Auswahl:

- 2 reelle  $\delta(\omega)$  Linien (reell, gerade) ●—○ Cos – Schwingung
- 2 imaginäre  $\delta(\omega)$  Linien (imaginär, ungerade) ●—○ Sin – Schwingung

Bild 2.3 zeigt, wie man die Teile des Bildes 2.2 damit einer BP  $\rightarrow$  TP – Transformation unterziehen kann.

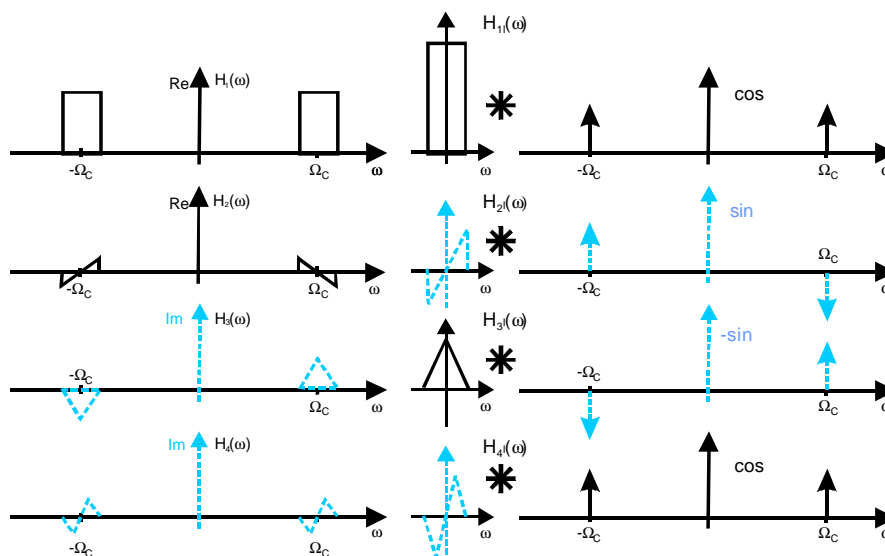


Bild 2.3: Bandpaß – Tiefpaß – Transformation für die Anteile des unsymmetrischen Bandpasses

Wie man aus Bild 2.3 erkennt, tritt bei der Transformation von  $H_1(\omega)$  und  $H_4(\omega)$  ein Cos auf und bei  $H_2(\omega)$  und  $H_3(\omega)$  ein Sin.

Die Tiefpässe  $H_{l_2}(\omega)$  &  $H_{l_4}(\omega)$  sind *imaginär & ungerade*. Stellt man diese Übertragungsfunktionen in *polarer Form nach Betrag & Phase* dar, so erkennt man:

- Beträge  $|H_{l_2}|$  &  $|H_{l_4}|$  : gerade in  $\omega$

- Phasen  $\Theta(\omega) = 90^\circ$  für  $\omega > 0$ ;  $-90^\circ$  für  $\omega < 0$

Diese beiden äquivalenten Tiefpässe stellen somit *Hilbert-Tiefpässe* (HTP, Hilbert-Filter) dar.

## 2.1 Die Impulsantwort des unsymmetrischen Bandpasses

Die Impulsantwort des unsymmetrischen Bandpasses ergibt sich aus der Bandpaß  $\rightarrow$  Tiefpaß – Transformation gemäß Bild 2.3.

$$\begin{aligned}
 H_1(\omega) &= \frac{1}{2} \{H_{l_1}(\omega + \Omega_C) + H_{l_1}(\omega - \Omega_C)\} & \bullet \rightarrow \circ & h_1(t) = h_{l_1}(t) \cdot \cos(\Omega_C t) \\
 H_2(\omega) &= j \frac{1}{2} \{-H_{l_2}(\omega + \Omega_C) + H_{l_2}(\omega - \Omega_C)\} & \bullet \rightarrow \circ & h_2(t) = h_{l_2}(t) \cdot \sin(\Omega_C t) \\
 H_3(\omega) &= j \frac{1}{2} \{H_{l_3}(\omega + \Omega_C) - H_{l_3}(\omega - \Omega_C)\} & \bullet \rightarrow \circ & h_3(t) = -h_{l_3}(t) \cdot \sin(\Omega_C t) \\
 H_4(\omega) &= \frac{1}{2} \{H_{l_4}(\omega + \Omega_C) + H_{l_4}(\omega - \Omega_C)\} & \bullet \rightarrow \circ & h_4(t) = h_{l_4}(t) \cdot \cos(\Omega_C t)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Da  $H(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega) + H_3(\omega) + H_4(\omega)$  ist, gilt:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= h_1(t) + h_2(t) + h_3(t) + h_4(t) \\
 &= \underbrace{\{h_{l_1}(t) + h_{l_4}(t)\}}_{a(t)} \cos(\Omega_C t) + \underbrace{\{h_{l_2}(t) - h_{l_3}(t)\}}_{b(t)} \sin(\Omega_C t) \\
 &= s(t) \cdot \cos\{\Omega_C t + \varphi(t)\}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \sqrt{a(t)^2 + b(t)^2} \\
 \varphi(t) &= -\arctan\{b(t)/a(t)\}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

- Die Impulsantwort eines unsymmetrischen Bandpasses ist eine amplituden- & phasenmodulierte Schwingung.

## 2.2 Die Realisierung des unsymmetrischen Bandpasses mit Hilfe äquivalenter Tiefpässe

Bei der Umsetzung aus der Bandpaß-Lage in die Tiefpaß-Lage und zurück in die Bandpaßlage treten die folgenden Fälle auf, wie man aufgrund der entsprechenden Umsetzung für das symmetrische Bandpaß-System schließen kann. In der Tabelle sind pro Zweig der Träger und das Tiefpaß-System angegeben.

Teilsystem	1. Zweig	2. Zweig
$H_1$	$\cos \rightsquigarrow H_{l_1} \rightsquigarrow \cos$	$\sin \rightsquigarrow H_{l_1} \rightsquigarrow \sin$
$H_2$	$-\cos \rightsquigarrow H_{l_2} \rightsquigarrow \sin$	$\sin \rightsquigarrow H_{l_2} \rightsquigarrow \cos$
$H_3$	$-\cos \rightsquigarrow H_{l_3} \rightsquigarrow \sin$	$\sin \rightsquigarrow H_{l_3} \rightsquigarrow \cos$
$H_4$	$\cos \rightsquigarrow H_{l_4} \rightsquigarrow \cos$	$-\sin \rightsquigarrow H_{l_4} \rightsquigarrow \sin$

Damit ergibt sich für den unsymmetrischen Bandpaß folgende Struktur für eine Realisierung mit Hilfe von Tiefpaß-Systemen, Bild 2.4.

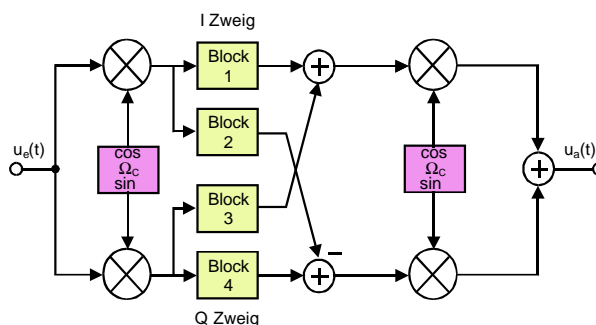


Bild 2.4: Erzeugung des unsymmetrischen Bandpasses mit Hilfe von Tiefpaß-Systemen



Die Struktur hat jetzt – im Unterschied zum symmetrischen System – 4 Filterblöcke. Diese 4 Blöcke für die Tiefpässe bestehen jeweils aus einer Parallel-Schaltung von 2 der äquivalenten Tiefpässen. Es sind dies von oben nach unten:

Block 1	$H_{l_1} + H_{l_4}$
Block 2	$H_{l_2} + H_{l_3}$
Block 3	$H_{l_2} + H_{l_3}$
Block 4	$H_{l_1} - H_{l_4}$

Diese Filterblöcke können als *komplexe Tiefpässe* bezeichnet werden, da sie jeweils aus der Parallelschaltung von je einem Tiefpaß und einem Hilbert-Tiefpaß bestehen.

Das Teilsystem  $H_{l_1}(\omega)$  ist dasjenige, das im symmetrischen Fall übrig bleibt. Damit bleiben in diesem Fall nur noch Blöcke an den Positionen 1 & 4, in Übereinstimmung mit Bild 1.4. Die graphische Herleitung für die übrigen Teilsysteme geht in der gleichen Art wie in Bild 1.5 für das symmetrische System.

### 2.2.1 Komplexe Faltung zur I/Q Filterung im Tiefpaß-Bereich

Die I/Q Filterung im Basisband (Tiefpaß-Bereich) kann auch als komplexe Faltung aufgefaßt und realisiert werden. Bei der Digitalen Signalverarbeitung sind die äquivalenten (Tiefpaß-) Impulsantworten  $h_R(t)$  und  $h_I(t)$  zu verwenden, wobei

$$h_{\text{aeq}}(t) = h_R(t) + jh_I(t) \quad (2.9)$$

die äquivalente Tiefpaß-Impulsantwort des Bandpaß-Systems ist. Die Struktur zeigt Bild 2.5 (Siehe A.-FT 69, Kap. 4.8)

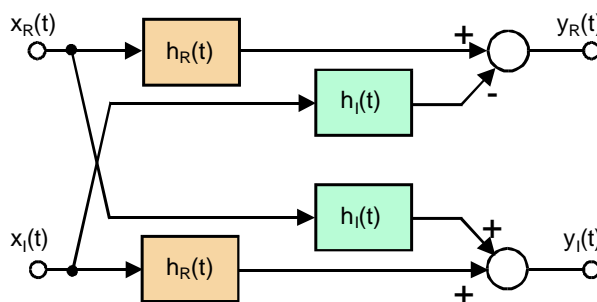


Bild 2.5: I/Q Filterung im Tiefpaß-Bereich als komplexe Faltung

### 2.3 Realisierung eines linearphasigen unsymmetrischen Bandpaß Systems mit Hilfe von äquivalenten Tiefpässen

Von besonderem Interesse sind unsymmetrische Bandpaß-Systeme, bei denen nur die Amplitudenkurve unsymmetrisch, aber die Phase linear bzw. die Gruppen-Laufzeit konstant ist. Ein solches System hat für den *nicht kausalen* Fall nur einen Realanteil, z.B. der Realanteil in Bild 2.1, wie sich zeigen läßt. Ist dieser Realanteil  $\geq 0$ , so hat dieser den gleichen Verlauf wie der Betrag der Übertragungsfunktion. Dies wird im Weiteren für die graphische Darstellung so angenommen.

Hierzu geht man von diesem nicht-kausalen Fall aus. Verschiebt man nun die Impulsantwort um eine Laufzeit  $t_0$  so weit, daß diese kausal wird, so ergibt sich bei der Übertragungsfunktion eine Phasendrehung  $\Theta(\omega) = \omega t_0$ . Eine Phasendrehung ergibt in der 3-dimensionalen Darstellung eine Art von *Schraubenlinie*, wie man sich auch leicht am Beispiel eines *idealen Bandpasses* mit Phasendrehung klar machen kann<sup>2</sup>. Da der Realteil bzw. der Imaginärteil als *Projektionen* dieser Schraubenlinie auf die reelle bzw. imaginäre Ebene interpretiert werden können, ergibt sich damit der Realteil als eine Multiplikation des Betrags der Übertragungsfunktion mit einer Cos-Kurve und der Imaginärteil als Multiplikation mit einer Sin-Kurve.

<sup>2</sup>Vergleiche hierzu ebenfalls die Darstellung des *analytischen Signals*, siehe A.-FT 51, Bild 3.20.

Damit ist die oben aufgestellte Bedingung, Gleichung (2.4), erfüllt, daß ein kausales System einen Real- und Imaginärteil hat. Gleichzeitig ist aber auch erfüllt, daß das so definierte System eine *lineare Phase* — und damit eine konstante Gruppen-Laufzeit — hat.

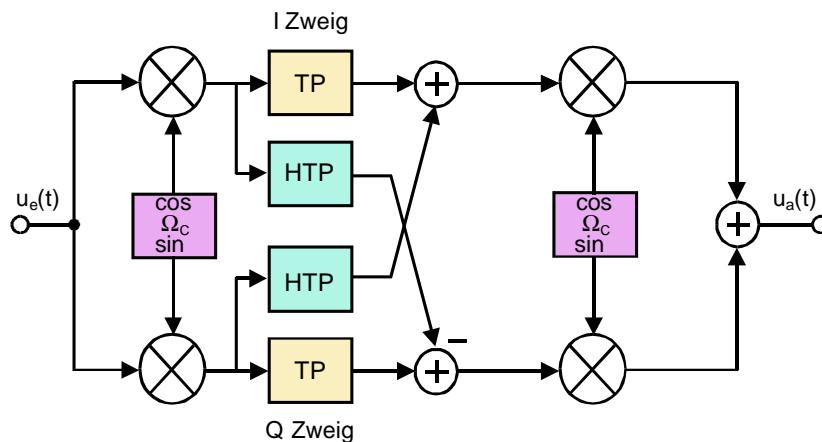


Bild 2.6: Erzeugung des unsymmetrischen Bandpasses mit linearer Phase

Für einen linearphasigen Bandpaß mit unsymmetrischer Durchlaßkurve treten somit nur noch die Teilsysteme  $H_1(\omega)$  und  $H_2(\omega)$  auf. Die Struktur des Bildes 2.4 vereinfacht sich dadurch in soweit, daß in den Längszweigen nur noch Tiefpässe und in den Querzweigen nur noch Hilbert-Tiefpässe vorkommen, Bild 2.6. Für beide gilt dann die Forderung, daß der *Phasenverlauf linear* sein muß — abgesehen vom  $\pm 90^\circ$ -Sprung beim Hilbert-Filter. Bei einer digitalen Realisierung kommen deshalb nur FIR-Strukturen in Frage.

## 2.4 Der linearphasige unsymmetrische Bandpaß mit Nyquistflanke

Eine wichtige Anwendung hat das linearphasige unsymmetrische Bandpaß-System mit Nyquistflanke bei der **analogen Fernseh-Bildübertragung**. Das Fernsehbild wird dabei zeilen- bzw. punktwise mit Hilfe einer modifizierten Amplitudenmodulation (Rest-Seitenband AM, VSB vestigial side band) übertragen. Eine Amplitudenmodulation (AM) ergibt im Spektrum einen Träger auf der Frequenz  $\Omega_C$  und dazu spiegelbildlich 2 (ansonsten identische) Seitenbänder (oberes SB, unteres SB)<sup>3</sup>.

Die Modifikation zur normalen AM entsteht dadurch, daß eines der Seitenbänder z. T. weggefiltert wird um Bandbreite bei der Übertragung zu sparen (Rest-Seitenband AM, VSB). Durch diese Beschneidung darf es aber empfangsseitig nicht zu erkennbaren Verzerrungen des wiedergegebenen Bildes kommen, wobei besonders Helligkeits-Sprünge an Kanten kritisch sind. Bild 2.7 zeigt die Filterung im Empfänger, wobei bei der Trägerfrequenz  $\Omega_C$  eine Nyquistflanke (Punktsymmetrie zu  $\Omega_C, 0.5 \cdot A(0)$ ) entsteht.

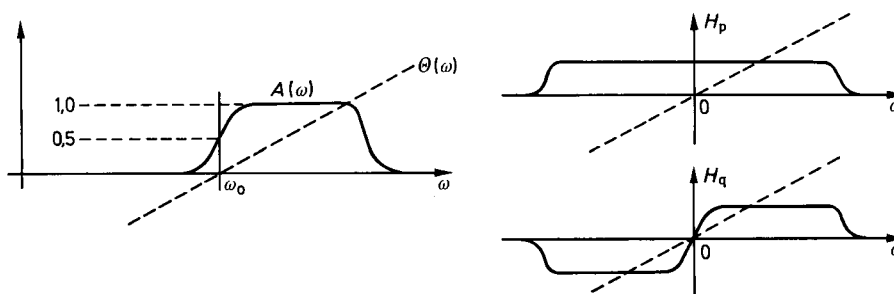


Bild 2.7: Linearphasiges Bandpaß-System beim Fernsehen und die beiden äquivalenten Tiefpässe  $H_p$  (TP) und  $H_q$  (HTP)

<sup>3</sup>Siehe Vorlesungs-Umdrucke AM-DSB und SSB-VSB

Die Nyquistflanke wird durch das Filter im Empfänger realisiert, an welches damit höhere Anforderungen gestellt werden als an das Filter im Sender. Dies widerspricht zwar der normalen Philosophie, wonach der Aufwand im Sender größer sein soll als im Empfänger, jedoch ist es wegen der *geringeren äquivalenten Rauschbandbreite* des Empfangsfilters notwendig. Hätte der Empfänger das breitere Filter, käme mehr Rauschen am Demodulator an. Beim analogen Fernsehen bewirkt Rauschen den „Schnee“ im Bild. Damit würde sich damit die Reichweite des Senders vermindern. Die versorgte Fläche schließlich reduziert sich quadratisch mit der Entfernung.

Der äquivalente TP des Gesamtsystems erhält aufgrund der Nyquistflanke einen konstanten Verlauf im Durchlaßbereich.

Der äquivalente TP bzw. der Hilbert-TP sind in Bild 2.7 als Realteil bzw. Imaginärteil mit Phase dargestellt. Dies ist genau genommen eine unzulässige Vermischung von kartesischer und polarer Darstellung, die man in der Literatur aber öfter findet.

Im Unterschied dazu ergibt sich ohne die Nyquistflanke ein äquivalentes TP-System, das als Summe von 2 Tiefpässen von *unterschiedlicher Grenzfrequenz* dargestellt werden kann. Da die *Anstiegszeit der Sprungantwort reziprok zur Grenzfrequenz* des TP ist, muß der TP mit geringerer Grenzfrequenz (mit Hilfe der Nyquistflanke) vermieden werden. Mit der Sprungantwort werden Helligkeitssprünge beschrieben. Eine langsam ansteigende Sprungantwort entspricht daher einer unscharfen Kante.

Die mit einem Bandpaß mit Nyquistflanke realisierbaren Sprungantworten zeigt Bild 2.8 an verschiedenen Beispielen. Der Realanteil des TP ist gerade, also ist die Sprungantwort ( $\rightarrow \int$  Impulsantwort) punktsymmetrisch bezüglich (Laufzeit / halber Endwert). Der Imaginäranteil des Hilbert-TP ist ungerade, also ist die Sprungantwort spiegelsymmetrisch.

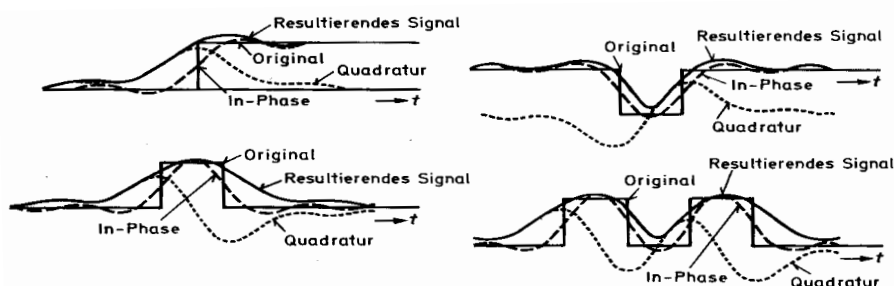


Bild 2.8: Beispiele für die Übertragung von Helligkeitssprüngen beim analogen Fernsehen

Die Filter im Fernsehen werden i.a. nicht digital realisiert, sondern in SAW-Technik (SAW Surface Acoustic Wave) und damit als BP Filter direkt mit der Mittenfrequenz des BP-Signals. Ein SAW ist eine Art Piezo-Filter, das für die anregenden Elektroden die Form der Impulsantwort des zu realisierenden Filters hat, Bild 2.9.

Die Herstellung der SAW-Filter erfolgt mit einer Präzision, die mit der Halbleitertechnologie vergleichbar ist. Daher benötigt ein SAW-Filter keinen Abgleich mehr (im Unterschied zu Spulenfiltern). SAW-Filter werden z.B. auch bei den Funktelefonen eingesetzt: HF-Teil (935 – 960 MHz, bzw. 1,8 GHz) und ZF-Teil (45 MHz).

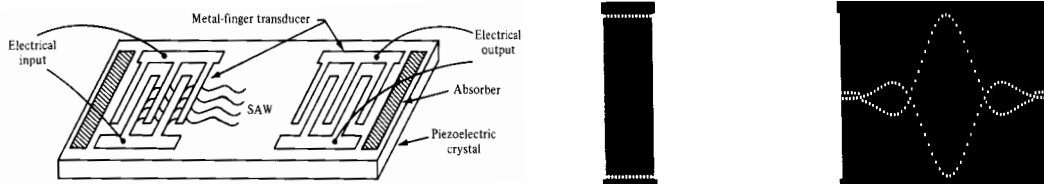


Bild 2.9: Prinzip des SAW-Filters und Maske eines steilflankigen SAW-Filters

### 3 Abtast-Theorem für Bandpaß-Signale

Die Darstellung von Bandpaß-Systemem durch Tiefpaß-Systeme gestattet sehr einfach, ein Abtasttheorem für Bandpaß-Signale zu formulieren. Dazu zeichnet man die Struktur des Bildes 2.4 so um, daß in der Tiefpaß-Ebene (ideal) abgetastet und anschließend sofort wieder rekonstruiert wird (Rekonstruktionsfilter RKF), Bild 3.1.

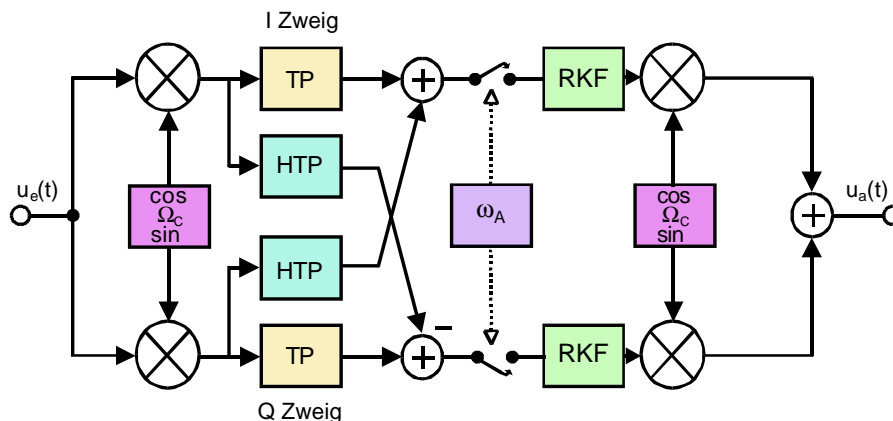


Bild 3.1: Struktur für die Nachbildung eines linearphasigen Bandpasses mit Abtastung in der Tiefpaß-Ebene

Aus Bild 3.1 erkennt man direkt, daß die Abtastfrequenz  $\omega_A$  sich nur nach der Grenzfrequenz  $\omega_c$  des Tiefpaß-Systems zu richten braucht, welche halb so groß ist wie die Bandbreite  $\omega_B$  des Bandpasses. Damit wird die Abtastbedingung für Bandpaß-Systeme:

$$\omega_A \geq 2\omega_c = \omega_B \quad 1. \text{ Bedingung für I/Q Bandpaß-Abtastung} \quad (3.1)$$

Diese Bedingung ist Grundlage zur *digitalen Filterung* von Bandpaß-Signalen im Basisband. Man benötigt also nur Abtastwerte, die (in erster Linie) von der Grenzfrequenz  $\omega_B/2$  der Nachricht bestimmt werden, nicht jedoch von der Trägerfrequenz  $\Omega_C$ .

#### 3.1 Nyquist-Bedingung für I/Q Bandpaß-Abtastung

Die Abtast-Frequenz  $\omega_A$  der (beiden I&Q) A/D-Wandler kann also zur Wandlung des Bandpaß-Signals entsprechend zu Gleichung (3.1) gewählt werden. Dies sieht zwar auf den ersten Blick wie eine Unterabtastung aus, ist es aber nicht.

Die Bandpaß-Abtastbedingung muß jedoch noch präzisiert werden, denn Gleichung (3.1) ist nicht hinreichend. Um das zu erkennen, wird ein Bandpaß-Spektrum betrachtet, Bild 3.2 (Seite 12).

Die Bandpaß-Abtastfrequenz  $\omega_{APB}$  muß so gewählt werden, daß in die Lücke  $L$  zwischen den BP-Spektren der Breite  $B$  eine ungerade (ganze) Anzahl  $Z$  (Integer) von Spektren des abgetasteten Signals paßt. Die Bedingung ist daher:

$$L/B = Z; \quad Z \text{ ungerade ganze Zahl: Integer} \quad (3.2)$$

$Z$  muß eine ungerade ganze Zahl (Integer) sein, damit die BP-Spektren exakt in die Basisband-Lage verschoben werden und damit frequenzmäßig symmetrisch zu  $\omega = 0$  zu liegen kommen.

Für die Bandpaß-Abtastfrequenz  $\omega_{APB}$  folgt dann, wie aus Bild 3.2 unmittelbar ersichtlich ist:

$$\omega_{APB} = 2B \quad (3.3)$$

Zur Filterung des in den TP-Bereich verschobenen Spektrums ist dann ein ideales TP-Filter („Küpfmüller-TP“) mit  $\infty$  steilen Flanken erforderlich.

In einer praktischen Anwendung ergibt sich für das Verhältnis von  $L/B$  daher keine ganze und ungerade Zahl. Dann ist die Bedingung (3.2) zu modifizieren. Für diesen Fall wird die spektrale Breite des BP-Signals zu  $(B+x)$  angesetzt, wodurch sich die Lücke zu  $(L-x)$  ergibt, Bild 3.3. Die zusätzliche Bandbreite  $x$  ist auch

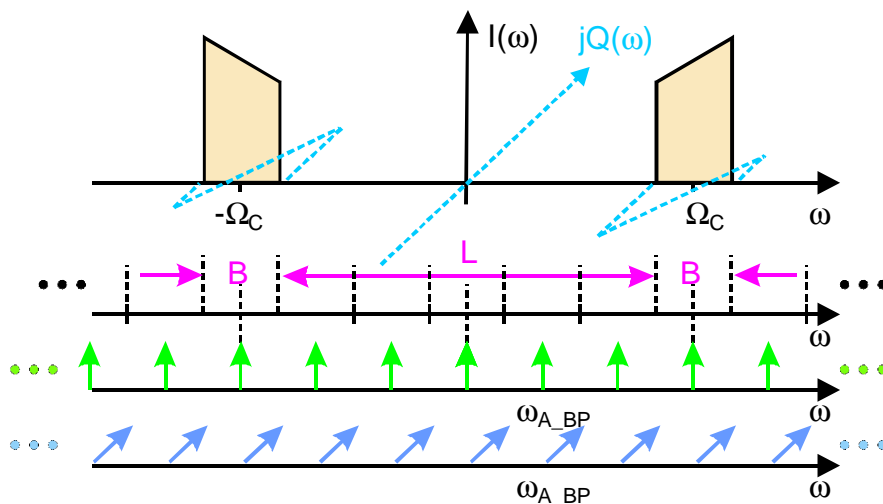


Bild 3.2: Spektren bei (idealer) Bandpaß-Abtastung mit I/Q Delta-Kämmen

dafür notwendig, daß im TP-Bereich mit einem Filter mit endlicher Flankensteilheit gearbeitet werden kann.

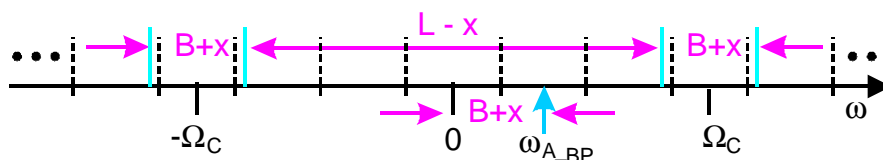


Bild 3.3: Zur Gewinnung des Wertes für die Abtastfrequenz  $\omega_{A_{BP}}$  wenn die Lücke kein ganzzahliges (ungerades) Verhältnis der Bandbreite des BP-Signals beträgt.

Die Bedingung lautet nun zunächst:

$$Z = \frac{L - x}{B + x}; \quad Z \text{ ungerade ganze Zahl: Integer} \tag{3.4}$$

Zur Bestimmung der Größe von  $x$  setzt man dann an:

$$\frac{L}{B} = Z + R; \quad R : \text{Rest, der so gewählt wird, daß } Z \text{ der größte mögliche ungerade Integer wird.} \tag{3.5}$$

Indem Gleichungen (3.4) und (3.5) gleichgesetzt werden, folgt die gesuchte Größe  $x$  zu:

$$x = \frac{B \cdot R}{2L - R} \tag{3.6}$$

Wie man nun aus Bild 3.3 erkennt, muß die Bandpaß-Abtastfrequenz zahlenwertmäßig um die Größe  $x$  erhöht werden. Damit folgt:

$$\boxed{\omega_{A_{BP}} = B + x = B + \frac{B \cdot R}{2L - R}} \quad \text{Nyquist-Bedingung für Bandpaß-Abtastung} \tag{3.7}$$

Die Nyquist-Bedingung für Bandpaß-Abtastung ist somit etwas eingeschränkter (und damit genauer einzuhalten) als die für Tiefpaß-Abtastung.

Die Bandpaß-Abtastung mit der Abtastfrequenz  $\omega_{A_{BP}}$  wird sowohl bei der Realisierung einer BP-Filterung mittels eines Signalprozessors angewendet als auch bei der Simulation von Übertragungssystemen auf dem Rechner oder bei Software-Lösungen.

### 3.2 Abtastraten-Erhöhung durch Taktverschiebung

Manchmal tritt das Problem auf, daß der Prozessor nicht schnell genug ist, um die benötigten Abtastfrequenzen zu realisieren. Anstelle davon daß man nun einen  $N$ -fach schnelleren Prozessor verwendet, gibt es die einfache Möglichkeit,  $N$  Prozessoren quasi parallel arbeiten zu lassen. Hierzu benötigt aber jeder einen um  $n/N \cdot T_A$ ;  $n = 1, \dots, N$  verschobenen Takt. Der erste berechnet die Stützwerte  $1, N + 1, 2N + 1, \dots$ , der zweite berechnet die Stützwerte  $2, N + 2, \dots$  usw. Auf diese Weise gelingt es, unter Einsatz mehrerer Prozessoren, zu entsprechend hohen Abtastraten zu kommen<sup>1</sup>. Auch in der Analogtechnik sind entsprechende Abtastfilter bekannt, die *N-Pfad-Filter*.

### 3.3 Digitale Realisierung der Multiplizierer

Nach dem Abtasttheorem müssen aus der Cos- oder Sin-Schwingung des Trägers bei der Multiplikation mindestens 2 Stützwerte genommen werden. Nimmt man deren 4, so ist das Abtasttheorem gut erfüllt.

Besonders geschickt ist es, diese Werte für die Argumente  $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  zu entnehmen, denn dann ergeben sich folgende Werte.

$$\begin{array}{rcccc}
 & 0 & \pi/2 & \pi & 3\pi/2 \\
 \cos & 1 & 0 & -1 & 0 \\
 \sin & 0 & 1 & 0 & -1
 \end{array} \tag{3.8}$$

Stellt man die Digitalwerte als *Vorzeichen & Betrag* dar, so braucht man offensichtlich nur alternierend das Vorzeichen zu invertieren und kann zusätzlich noch jeden 2. Wert weglassen. Dies geht schneller als eine Multiplikation. Da dieses Verfahren keine besonders große Abtastratenerhöhung darstellt, benötigt man zur Rekonstruktion einen Bandpaß (z.B. einen Schwingkreis) auf der Trägerfrequenz.

## Literatur

- [1] Rudolph, D.: Kapitel 2 in Bergmann: *Lehrbuch der Fernmeldetechnik*, 5. A., Schiele & Schoen, 1986
- [2] Lüke, H.D. : *Signalübertragung*, 4.Auflage, Springer 1990.
- [3] Papoulis, A. : *The Fourier Integral and its Applications*, McGraw-Hill, 1962.
- [4] Stremler, F. G.: *Communication Systems*, 3rd ed. Addison Wesley, 1990
- [5] Feldmann, M.; Hénaff, J.: *Surface Acoustic Waves for Signal Processing*, Artech House, 1989
- [6] Goldman, S. : *Frequency Analysis, Modulation and Noise*, Dover Publications, 1948.

---

<sup>1</sup>Im Unterschied zu Transputern ist hier keine Korrespondenz unter den Prozessoren erforderlich.