# Blockschaltbild–Algebra

Ein Übertragungs–System besteht i.a. aus mehreren Teilsystemen, die mit Hilfe von Blöcken dargestellt werden können als

- Ketten–Schaltung
- Parallel–Schaltung
- Rückkopplungs–Schaltung

oder einer Kombination aus diesen Verknüpfungen. Die Verknüpfungen der einzelnen Blöcke erfolgt dabei mit Hilfe von

- Verzweigungen (*takeoff point*)
- Summierstellen (*summing point*)

## 1 Blockschaltbilder

Handelt es sich bei dem Übertragungs–System um ein lineares Zeit–invariantes (LTI, *linear time invariant*) System, kann dieses im Zeitbereich mit Hilfe der Faltung oder im Frequenzbereich mit Hilfe eines Produktes dargestellt werden, Bild 1.1.

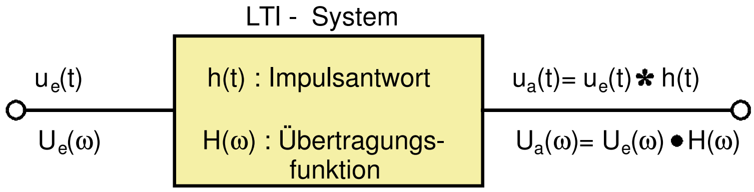



Bild 1.1: Blockschaltbild eines linearen Zeit–invarianten Übertragungs–Systems

Bei der Blockschaltbild–Algebra werden die Systeme meist im **Frequenz–Bereich** (Fourier–Transformation $H(\omega)$) bzw. im **Bild–Bereich** (Laplace–Transformation $H(s)$) betrachtet.

Da Blockschaltbild–Umformungen ein wesentlicher Teil der Analyse von **Regelkreis–Systemen** sind, werden bei den verwendeten Bildern die Blöcke (wie in der Regelungstechnik üblich) nicht nur mit $H$, sondern auch mit $G$ oder $P$ bezeichnet.

Die Signale werden entsprechend mit $x$, $y$, $e$, $m$, $z$, $u$ usw. im Zeitbereich und mit $X$, $Y$, $E$, $M$, $Z$, $U$ usw. im Frequenz– bzw. Bild–Bereich bezeichnet.

### 1.1 Summierstelle und Verzweigung

Wird dieses Blockschaltbild weiter detailliert, ergeben sich Teil–Blöcke, die über Summierstellen (*summing point*) und Verzweigungen (*takeoff point*) mit einander verknüpft sind, Bild 1.2.

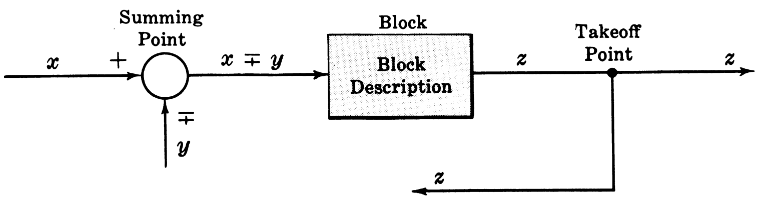



Bild 1.2: Blockschaltbild mit Summierstelle und Verzweigung

## 1.2 Ketten–Schaltung

Bei der Kettenschaltung zweier Blöcke ist die Ausgangsgröße des ersten Blocks $G_1(s)$ die Eingangsgröße des zweiten Blocks $G_2(s)$ Bild 1.3.

$$M(s) = E(s) \cdot G_1(s) \tag{1.1}$$
$$C(s) = M(s) \cdot G_2(s) \tag{1.2}$$
$$C(s) = E(s) \cdot [G_1(s) \cdot G_2(s)] \tag{1.3}$$
$$\rightsquigarrow \frac{C}{E} = G_{\text{Kette}}(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \tag{1.4}$$

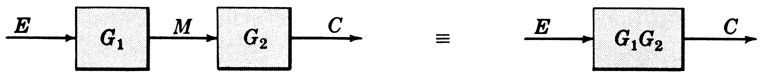



Bild 1.3: Blockschaltbild einer Kettenschaltung von Blöcken

Bei linearen Systemen ist die Reihenfolge der Kette beliebig und es gilt:

$$G_1 \cdot G_2 = G_2 \cdot G_1 \tag{1.5}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird nur noch $G$ statt $G(s)$ geschrieben.

Ist mindestens 1 System davon nichtlinear, führt eine Vertauschung der Reihenfolge auf ein unterschiedliches Ergebnis.

## 1.3 Parallel–Schaltung

Bei einer Parallel–Schaltung wird die Eingangsgröße verzweigt und beiden Systemen in identischer Größe zugeführt. Die beiden Ausgangsgrößen werden mit Hilfe einer Summierstelle zusammengefaßt, Bild 1.4.

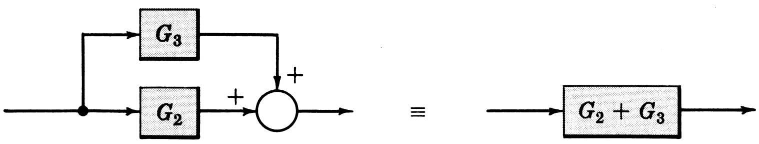



Bild 1.4: Blockschaltbild einer Parallelschaltung von Blöcken

$$G_{\text{parallel}} = G_3 + G_4 \tag{1.6}$$

## 1.4 Rückkopplungs–Struktur

Eine Rückkopplungs–Struktur besteht (mindestens) aus einem Vorwärts–Weg und einem Rückführ–Weg mit den zugehörigen Blöcken und deren Verknüpfungen durch Verzwigungspunkt und Summierstelle, Bild 1.5.

$$E = R \mp B \tag{1.7}$$
$$C = E \cdot G \tag{1.8}$$
$$B = C \cdot H \tag{1.9}$$
$$\rightsquigarrow G_{\text{Schleife}} = \frac{G}{1 \pm G \cdot H} \tag{1.10}$$

Die Charakteristische Gleichung des Rückkopplungs–Systems ergibt sich aus dem Nenner von Gleichung (1.10) zu

$$1 \pm G \cdot H = 0 \tag{1.11}$$

Ergeben sich dabei Polstellen in der rechten $s = \zeta + j\omega$ Halbebene, so wird das Rückkopplungs–System instabil. Die Untersuchungen zur Stabilität ist daher ein wesentlicher Teil der Regelungstechnik.

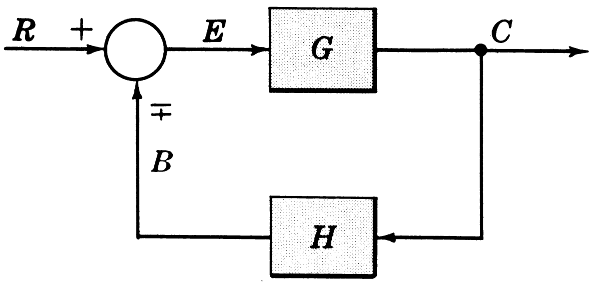



Bild 1.5: Blockschaltbild einer Rückkopplungs–Schleife (kanonische Form)

### 1.4.1 Schleife mit Regler

Praktisch realisierte Übertragungs–Systeme enthalten i.a. zusätzlich (mindestens) eine Rückführschleife oder Gegenkopplung, z.B. um Störgrößen (*disturbance*) zu unterdrücken, die durch Nichtlinearitäten entstehen können.

Gemäß den Bezeichnungen der Regelungstechnik besteht ein elektrisches Übertragungs–System aus folgenden Blöcken

- Regel–Strecke (*plant*) — der Leistungs–Verstärker
- Regler (*control elements*) — den Vorstufen mit geeignet gewählter Übertragungsfunktion
- Rückkopplung (*feedback elements*) — (passive) Schaltelemente mit denen ein Teil der Ausgangsgröße auf den Eingang zurückgeführt wird

Die Kettenschaltung von Regler und Regel–Strecke bilden den Vorwärts–Pfad (*forward path*), während die Rückkopplung den Gegenkopplungs–Pfad (*feedback path*) oder Rückführzweig bildet, Bild 1.6. Bei dieser Darstellung sind die Größen im Zeitbereich angegeben.

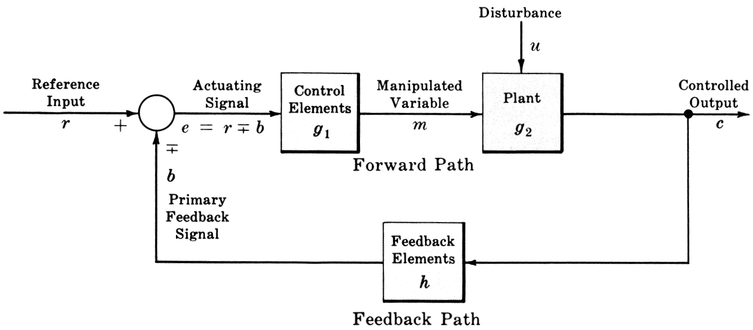



Bild 1.6: Blockschaltbild eines Übertragungs–Systems mit Gegenkopplung bzw. eines Regelkreises (Zeitbereich)

Im allgemeinen Fall kann die Störung (*disturbance*) $u(t)$ von dem nichtlinearen Verhalten der Strecke als auch von Rückwirkungen durch die Last herrühren. Beide Einflüsse können mit Hilfe einer Rückkopplungs–Struktur minimiert werden.

Werden die Größen im Frequenzbereich bzw. Bildbereich angegeben, Bild 1.7, läßt sich die Übertragungsfunktion der Schleife sehr einfach bestimmen.

Man betrachtet hierzu die Vorwärts–Wege und den Schleifen–Weg. Da die Analyse im Frequenzbereich erfolgt, können die Gleichungen für die Kettenschaltung und die Summierstellen direkt angewendet werden. Da es sich um ein lineares System handeln soll, kann auch der Überlagerungs–Satz angewendet werden. Damit erhält man

$$\begin{aligned} H_v(\omega) &= H_R(\omega) \cdot H_S(\omega) && \textbf{ÜTF Vorwärts–Weg 1 (Führungsgröße)} \\ H_z(\omega) &= 1 && \textbf{ÜTF Vorwärts–Weg 2 (Störung)} \\ H_o(\omega) &= H_G(\omega) \cdot H_R(\omega) \cdot H_S(\omega) && \textbf{ÜTF Schleifen–Weg} \end{aligned} \tag{1.12}$$

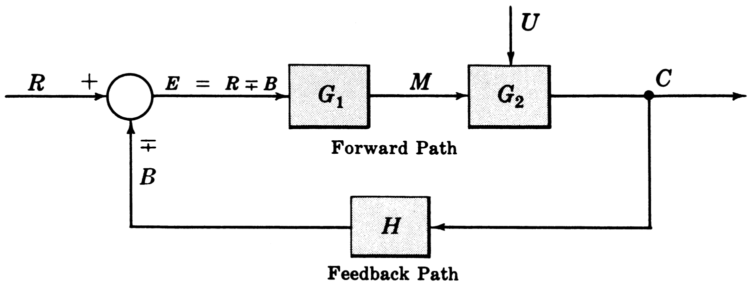



Bild 1.7: Blockschaltbild eines Übertragungs–Systems mit Gegenkopplung bzw. eines Regelkreises (Frequenzbereich)

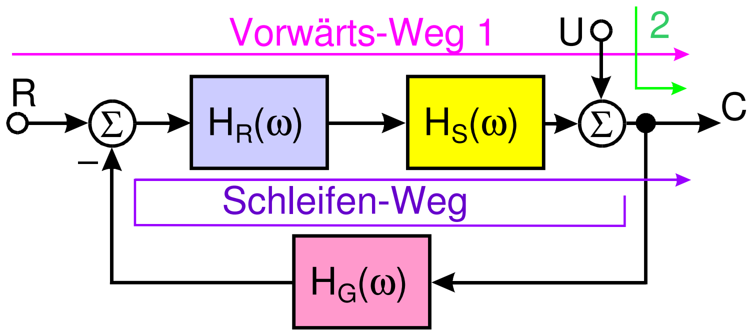



Bild 1.8: Übertragungs–Funktion mit Hilfe der Wege durch die Schaltung

Es ergibt sich für die Übertragungsfunktion (ÜTF) einer gegengekoppelten Struktur die Vorschrift:

$$\boxed{\textbf{ÜTF der Gegenkopplungs–Struktur} = \frac{\textbf{ÜTF Vorwärtsweg}}{1 + \textbf{ÜTF Schleifenweg}}} \tag{1.13}$$

Für die **Führungs–Übertragungs–Funktion** $H_F(\omega)$ ergibt sich damit:

$$H_F(\omega) = \frac{H_v(\omega)}{1 + H_o(\omega)} = \frac{H_R(\omega) \cdot H_S(\omega)}{1 + H_G(\omega) \cdot H_R(\omega) \cdot H_S(\omega)} \tag{1.14}$$

Entsprechendes gilt für die **Stör–Übertragungs–Funktion** $H_Z(\omega)$:

$$H_Z(\omega) = \frac{H_z(\omega)}{1 + H_o(\omega)} = \frac{1}{1 + H_G(\omega) \cdot H_R(\omega) \cdot H_S(\omega)} \tag{1.15}$$

Für den Fall, daß die Kreisverstärkung (Schleifen–Verstärkung) $|H_o(\omega)|$ genügend groß gemacht werden kann, $|H_o(\omega)| \to \infty$ (Beispiel: Operations–Verstärker), ergibt sich:

$$H_F(\omega) \quad \to \quad \frac{1}{H_G(\omega)} \tag{1.16}$$

$$H_Z(\omega) \quad \to \quad 0 \tag{1.17}$$

Hieraus ergeben sich folgende Konsequenzen:

- Eine Störgröße wirkt sich dann nicht mehr auf das Ausgangssignal aus.
- Die Übertragungsfunktion $H_F$ wird nur durch den Gegenkopplungszweig $H_G$ bestimmt. Die (sonstigen) Eigenschaften z.B. eines Operationsverstärkers treten total in den Hintergrund.

  Auf diese Weise lassen sich (analoge) Halbleiter–Schaltungen dimensionieren, die von den Transistor–Eigenschaften weitestgehend unabhängig werden.

## 1.5 Blockschaltbild–Umformungen

Zur Analyse von Übertragungs–Systemen, die in Form von Blöcken gegeben sind, ist es notwendig, diese Strukturen so umzuformen, daß daraus die resultierende Gesamt–Übertragungsfunktion bestimmt werden kann.

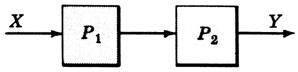
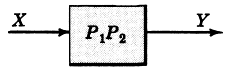
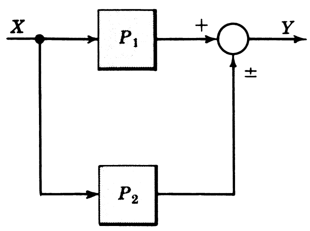
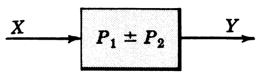
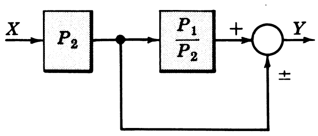
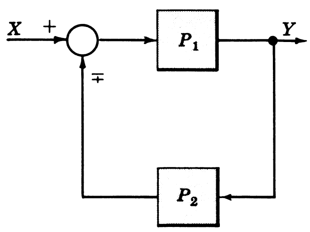
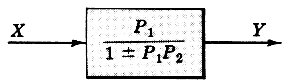
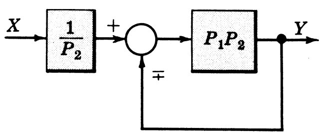
Es ist selbstverständlich, daß eine gegebene Struktur durch die Umformung ihre Eigenschaften nicht ändern darf. Die Vorschrift der Gleichung (1.13) ergibt hierzu eine einfach zu handhabende Möglichkeit.

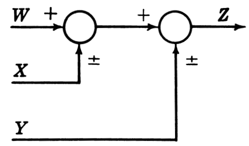
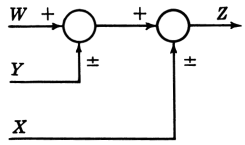
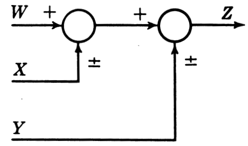
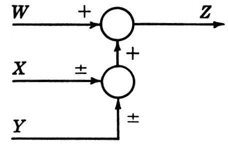
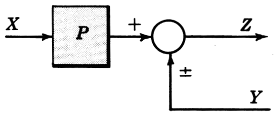
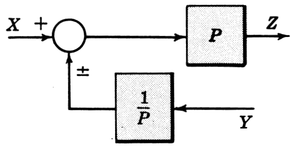
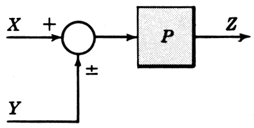
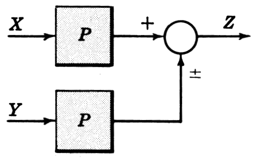
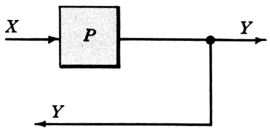
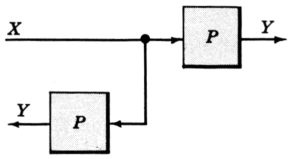
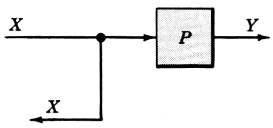
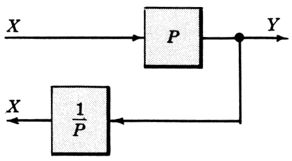
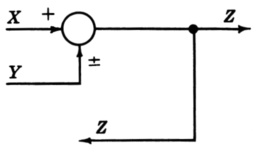
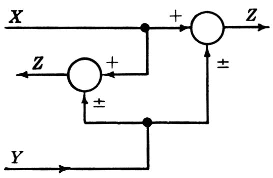
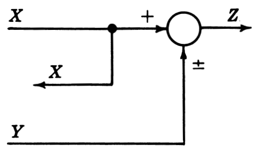
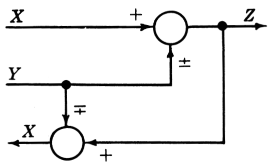
- Die ÜTF in den vorhandenen Wegen darf sich durch die Umformung nicht ändern.
- Muß bei einer Umformung ein zusätzlicher Block $P$ an einer Stelle in einen Weg aufgenommen werden, so ist an anderer Stelle des gleichen Weges ein **inverser Block** $1/P$ eizufügen, damit die resultierende ÜTF dieses Weges gleich bleibt.

**Vorgehensweise :**

1. Alle Ketten–Schaltungen zusammenfassen.
2. Alle Parallel–Schaltungen zusammenfassen.
3. Alle inneren Schleifen eliminieren.
4. Alle Summierstelllen nach links und alle Verzweigungen nach rechts schieben.

In der folgenden Tabelle sind die dabei notwendigen Teil–Schritte aufgelistet.

| | Transformation | Equation | Block Diagram | Equivalent Block Diagram |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Combining Blocks in Cascade | $Y = (P_1P_2)X$ |  |  |
| 2 | Combining Blocks in Parallel; or Eliminating a Forward Loop | $Y = P_1X \pm P_2X$ |  |  |
| 3 | Removing a Block from a Forward Path | $Y = P_1X \pm P_2X$ | |  |
| 4 | Eliminating a Feedback Loop | $Y = P_1(X \mp P_2Y)$ |  |  |
| 5 | Removing a Block from a Feedback Loop | $Y = P_1(X \mp P_2Y)$ | |  |

| | Transformation | Equation | Block Diagram | Equivalent Block Diagram |
|---|---|---|---|---|
| **6a** | Rearranging Summing Points | $Z = W \pm X \pm Y$ |  |  |
| **6b** | Rearranging Summing Points | $Z = W \pm X \pm Y$ |  |  |
| **7** | Moving a Summing Point Ahead of a Block | $Z = PX \pm Y$ |  |  |
| **8** | Moving a Summing Point Beyond a Block | $Z = P[X \pm Y]$ |  |  |
| **9** | Moving a Takeoff Point Ahead of a Block | $Y = PX$ |  |  |
| **10** | Moving a Takeoff Point Beyond a Block | $Y = PX$ |  |  |
| **11** | Moving a Takeoff Point Ahead of a Summing Point | $Z = X \pm Y$ |  |  |
| **12** | Moving a Takeoff Point Beyond a Summing Point | $Z = X \pm Y$ |  |  |

## 1.6 Einheits–Rückführung

Eine direkt rückgekoppelte Struktur hat im Gegenkopplungszweig eine Übertragungsfunktion $H_G(s) = 1$, was als direkte Verbindung zwischen dem Ausgang und der Summierstelle angesehen werden kann, Bild 1.9.

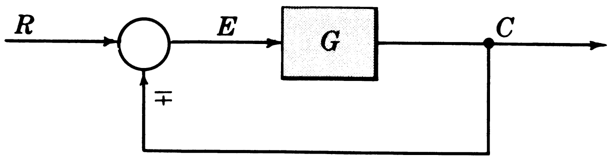



Bild 1.9: Direkte Gegenkopplung

Die Übertragungsfunktion der Einheits–Rückführung wird mit $H_o(s) = G(s)$ zu

$$H_F(s) = \frac{H_o(s)}{1 + H_o(s)} = \frac{G}{1+G} \tag{1.18}$$

Wird eine kanonische Struktur, Bild 1.5, in eine Einheits–Rückführung umgewandelt, erhält man das Ergebnis in Bild 1.10.

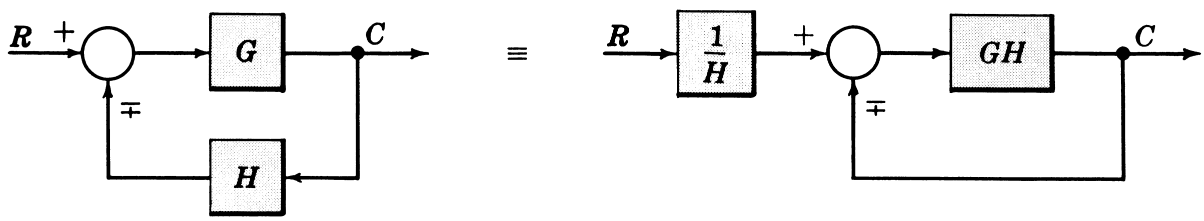



Bild 1.10: Umwandlung Kanonische Form in Direkte Gegenkopplung

Eine Kontrolle von Vorwärts–Weg und Schleifen–Weg zeigt, daß die jeweiligen Übertragungsfunktionen gleich geblieben sind.

$$H_F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{H(s)} \cdot \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{1.19}$$

## 1.7 Unterlagerte Schleifen

Blockstrukturen enthalten i.a. Paralleschaltungen von Blöcken und unterlagerte (innere) Rückführschleifen, wie Bild 1.11 dies an einem Beispiel zeigt.

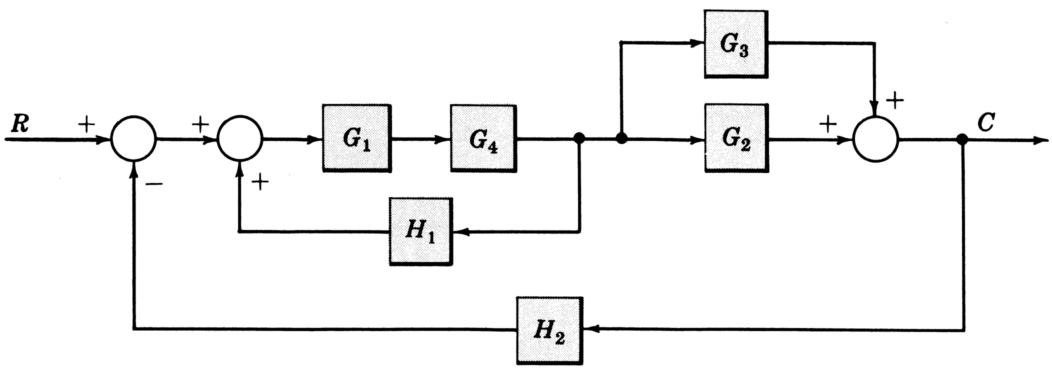



Bild 1.11: Struktur mit unterlagerter Rückführ–Schleife

Eine genaue Betrachtung der Struktur Bild 1.11 zeigt, daß diese eine unterlagerte Schleife und eine Parallelschaltung enthält.

- Die Parallelschaltung besteht aus den Blöcken $G_2 + G_3$.
- Die unterlagerte Schleife besteht aus den Blöcken $G_1$, $G_4$ und $H_2$.

Gemäß der zur Blockschaltbild–Umformung vorgegebenen Vorgehensweise werden

1. Ketten–Schaltungen zusammengefaßt: $G_K = G_1 \cdot G_4 = G_1G_4$
2. Parallel–Schaltungen zusammengefaßt: $G_P = G_2 + G_3$
3. innere Schleifen eliminiert: $H_I = \dfrac{G_1G_4}{1 - H_1G_1G_4}$
   Da die innere Schleife über + geschlossen ist, erscheint im Nenner ein $-$!

Nunmehr besteht der Vorwärts–Weg aus $H_V = H_I \cdot G_P$, so daß insgesamt eine kanonische Form entstanden ist, Bild 1.12.

$$H_v = H_I \cdot G_P = \frac{G_1G_4}{1 - H_1G_1G_4} \cdot (G_2 + G_3) \qquad \textbf{Vorwärtsweg} \tag{1.20}$$

$$H_o = (H_I \cdot G_P) \cdot H_2 \qquad \textbf{Schleifenweg} \tag{1.21}$$

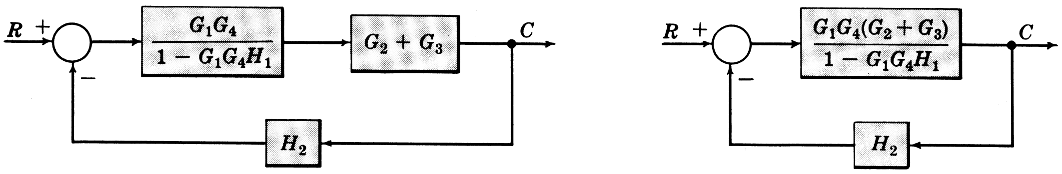



Bild 1.12: Umfomung in eine kanonische Struktur

Man erhält damit:

$$H_F = \frac{H_v}{1 + H_o} = \frac{\frac{G_1G_4 \cdot (G_2+G_3)}{1-H_1G_1G_4}}{1 + \frac{G_1G_4 \cdot (G_2+G_3)}{1-H_1G_1G_4} \cdot H_2} \tag{1.22}$$

# 2 Signalfluß–Graphen

Die Betrachtung der Wege durch eine Blockschaltung wird formalisiert unter dem Begriff der Signalfluß–Graphen (*signal flow graph*). Es ist dies eine elegante Möglichkeit auch sehr stark vermaschte Strukturen zu analysieren.

Hierbei zeigt es sich, daß die Gleichung (1.13) ein Spezialfall ist, der (nur) dann gilt, wenn es keine Rückführ–Schleifen gibt, die von anderen Schleifen nicht berührt werden.

# Literatur

[1] Di Stefano III, J.J; Stubberud, A.R.; Williams, I.J.: *Theory and Problems of Feedback and Control Systems*, Schaum's Outline Series, McGraw–Hill, 1967