

Filter-Systeme

Inhaltsverzeichnis

1 Filterarten	1
1.1 Die Umrechnung auf den äquivalenten Tiefpaß	2
2 Übertragungsfunktion, Pole und Nullstellen	2
2.1 Pol-Nullstellen-„Gebirge“	3
3 Typischer Amplitudengang und Dämpfungsverlauf eines Tiefpasses	5
4 Idealisierte Filtereigenschaften	5
5 Realisierungen für die „Ideal-Typen“	7
5.1 Butterworth Filter	7
5.2 Tschebyscheff-Filter	8
5.3 Cauer-Filter	9
5.4 Bessel-Filter	10
5.5 Kritisch gekoppeltes Filter (Gauß-Filter)	10
5.6 Allpässe	11
6 Vergleich der verschiedenen Filter-Realisierungen	12
6.1 Vergleich bezüglich Filtersteilheit	12
6.2 Vergleich von Phase, Laufzeit, Sprungantwort	12

Abbildungsverzeichnis

1.1 Die grundsätzlichen Verläufe der Amplitudengänge von TP, HP, BP, BS in realistischer und idealisierter Darstellung	1
1.2 Prinzip der TP \leftrightarrow BP Transformation	2
2.1 Schaltbild eines RC-Tiefpasses	2
2.2 Schaltbild eines RLC-Tiefpasses	2
2.3 PN-Gebirge des RC-TP (σ ersetzen durch ζ)	4
2.4 PN-Gebirge des RLC-TP; links $d = 1/\sqrt{2}$, rechts $d = 0,25$ (σ ersetzen durch ζ)	4
2.5 PN-Gebirge des RC-Spannungsteilers (lineare Darstellung), PDT_1 (σ ersetzen durch ζ)	5
3.1 Der typische Amplitudengang eines TP-Filters und Toleranz-Schema (links) und Toleranzschema für den Dämpfungsverlauf (rechts)	5
4.1 Kùpfmùller-Tiefpaß als „idealer Tiefpaß“ mit Impuls- und Sprungantwort	6
4.2 Gauß-Tiefpaß mit Impuls- und Sprungantwort	6
5.1 Betragsquadrat des Amplitudengangs eines Butterworthfilters	7
5.2 Bodediagramm des Butterworthfilters	8
5.3 PN-Gebirge eines Butterworthfilters 4. Ordnung (σ ersetzen durch ζ)	8
5.4 Quadrat des Amplitudengangs für Tschebyscheff-Filter ungerader und gerader Ordnung	8
5.5 Pol-Verteilung des Tschebyscheff-Filters 4. Ordnung (σ ersetzen durch ζ)	9
5.6 PN-Gebirge des Tschebyscheff-Filters 4. Ordnung (σ ersetzen durch ζ)	9
5.7 Quadrat des Amplitudengangs eines Cauer-Filters	9
5.8 PN-Plan und PN-Gebirge des Cauer-Filters 4. Ordnung (σ ersetzen durch ζ)	10
5.9 Bodediagramm des Amplitudengangs von Bessel-Tiefpässen	10
5.10 Pol-Nullstellen-Verteilung und Übertragungsfunktion eines Allpasses 2. Ordnung	11
5.11 Allpaß im Vergleich zu einem Tiefpaß mit gleicher Polstellenverteilung (σ ersetzen durch ζ)	11
5.12 PN-Gebirge eines Allpasses 2. Ordnung (σ ersetzen durch ζ)	11
6.1 Dämpfungsverlauf $a(\Omega)$ für (P) Butterworth-, (T) Tschebyscheff-, (C) Cauer-Filter (gleicher Ordnung)	12
6.2 Amplitudengänge für Filter 4. und 10. Ordnung. 1: TP mit kritischer Dämpfung (Gauß), 2: Bessel-TP, 3: Butterworth-TP, 4: Tschebyscheff-TP (3 dB Welligkeit)	12

-
- 6.3 Vergleich von Gruppenlaufzeit t_{gr} und Phase φ für Tiefpässe 4. Ordnung. 1: TP mit kritischer Dämpfung (Gauß), 2: Bessel-TP, 3: Butterworth-TP, 4: Tschebyscheff-TP (0.5 dB Welligkeit), 5: Tschebyscheff-TP (3 dB Welligkeit) 13
- 6.4 Vergleich der Sprungantworten von Tiefpässen 4. Ordnung. 1: TP mit kritischer Kopplung (Gauß), 2: Bessel-TP, 3: Butterworth-TP, 4: Tschebyscheff-TP (0.5 dB Welligkeit), 5: Tschebyscheff-TP (3 dB Welligkeit) 13

Filter-Systeme

Filter dienen dazu, Signale frequenzmäßig zu trennen oder diese im Frequenzbereich zu formen. Es interessieren daher ihre Übertragungseigenschaften wie Amplituden- und Phasengänge bzw. die Frequenzgänge der Gruppenlaufzeit.

Im Unterschied zu der systemtheoretischen Betrachtungsweise, bei der ohne Rücksichten auf eine Realisierbarkeit idealisierende Vorgaben gemacht werden, werden hier **realisierbare** Amplituden- und Phasengänge betrachtet. Damit ergeben sich Einschränkungen für die möglichen Verläufe, denn man kann mit Hilfe von Reaktanzen (Spule, Kondensator) nur ganz bestimmte Verläufe realisieren, die von den physikalischen Eigenschaften der Reaktanzen abhängen. Dieses Gebiet der Nachrichtentechnik wurde im Zeitraum ca. 1930 bis 1970 ausgiebig beackert. Die Resultate hiervon findet man in den klassischen Werken über Netzwerk-Synthese. Eine sehr empfehlenswerte Einführung in die Theorie der Tiefpaß-Filter findet sich in [2] im Kapitel über aktive Filter.

Heute werden nur noch bei sehr hohen Frequenzen und bei Signalen großer Leistung analoge Filter verwendet. Alle anderen Aufgaben der Filterung werden mittels Digitaler Filterung realisiert. Hierbei haben sich für FIR Filter eigene Dimensionierungs-Regeln herausgebildet, wie z.B. Methoden der Fensterung oder der digitalen Optimierung. Bei IIR Filtern, die weniger rechenaufwendig sind, verwendet man jedoch durchaus die bei den analogen Filtern gefundenen Zusammenhänge. Der Grund dafür ist darin zu suchen, daß IIR Filter rückgekoppelte Strukturen darstellen, die prinzipiell immer instabil werden können. Diese Schwierigkeiten kann man umgehen, wenn die Resultate, die von analogen Filtern bekannt sind, auf die digitalen IIR Filter abgebildet werden.

1 Filterarten

Filter lassen sich nach verschiedenen Kriterien klassifizieren, wie z. B.:

Frequenzbereich: Tiefpaß, Hochpaß, Bandpaß, Bandsperre, Kamm-Filter, Allpaß

Analoge Realisierung: Reaktanz-Filter, mechanische Filter, Quarz-Filter, Oberflächenwellen-Filter (SAW : *surface acoustic wave*), RC aktive Filter

Digitale Realisierung: Finite Impulse Response (FIR), Infinite Impulse Response (IIR)

Bild 1.1 zeigt typische und idealisierte Amplitudengänge von *Tiefpaß (TP)*, *Hochpaß (HP)*, *Bandpaß (BP)*, *Bandsperre (BS)*.

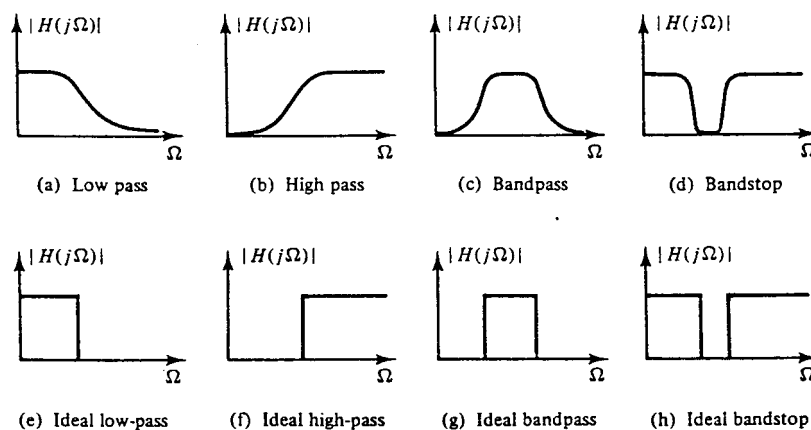


Bild 1.1: Die grundsätzlichen Verläufe der Amplitudengänge von TP, HP, BP, BS in realistischer und idealisierter Darstellung

Der Amplitudengang $A(\omega) = |H(\omega)|$ ist eine *gerade* Funktion in ω , wenn die (Kreis-) Frequenz von $-\infty$ bis $+\infty$ dargestellt ist. Bei Filtern wird aber häufig nur die *positive Frequenz* ($\omega \geq 0$) dargestellt. Bei der

zweiseitigen Darstellung sind die hier dargestellten Kurven für den Amplitudengang an der $|H(\omega)|$ - Achse (zusätzlich) zu spiegeln, wodurch sich gerade Funktionen (*even*) ergeben.

Bei Filtern wird die Frequenz oft in **normierter Form** als Ω angegeben.

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_x} = \omega \cdot T_x \quad \text{mit} \quad \omega_x = \frac{1}{T_x} \tag{1.1}$$

Hierbei bedeuten ω_x eine geeignet gewählte *Grenzfrequenz* bzw. T_x eine entsprechende *Zeitkonstante*. Die normierte Frequenz Ω ist damit dimensionslos.

1.1 Die Umrechnung auf den äquivalenten Tiefpaß

Die formelmäßige Behandlung der verschiedenen Filter-Arten läßt sich dadurch stark vereinfachen, daß man nur Formeln für normierte Tiefpässe ableitet und den Übergang auf die entnormierte Form sämtlicher Filterarten mit Hilfe von Transformationsformeln in der Art durchführt, daß Ω in der Formel für den Tiefpaß durch geeignete andere Ausdrücke ersetzt wird. Es ist daher üblich, die Herleitungen und graphischen Darstellungen, sowie die Werte für die Reaktanzen, nur für Tiefpässe anzugeben. [1] Bild 1.2 zeigt schematisch die Vorgehensweise.[3]

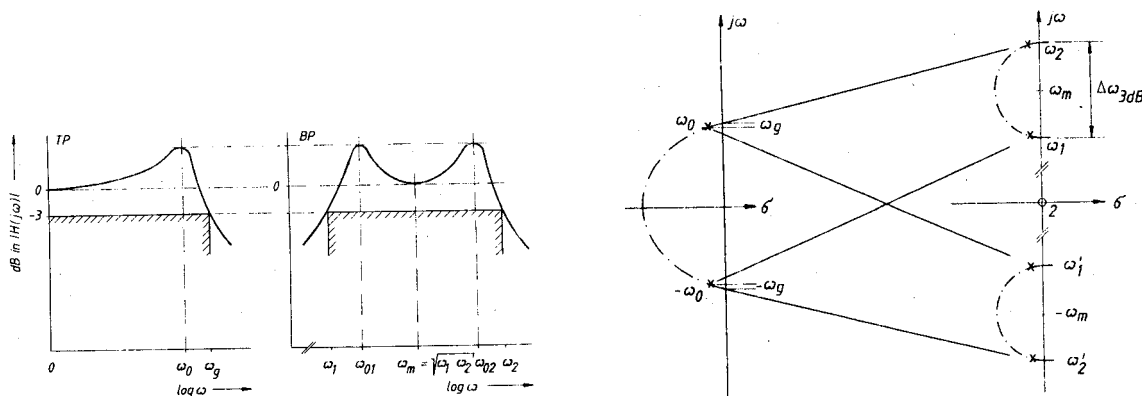


Bild 1.2: Prinzip der TP \leftrightarrow BP Transformation

2 Übertragungsfunktion, Pole und Nullstellen

Analoge Filter enthalten Energie-Speicher (Spulen, Kondensatoren). Sie sind daher in der Lage, **Eigenschwingungen** auszuführen. Diese entstehen dadurch, daß bei **kurz geschlossenem Eingang des Filters** sich die Energiespeicher entladen und dadurch am Filterausgang charakteristische Schwingungsformen, die Eigenschwingungen, auftreten. Dies soll anhand von 2 einfachen Beispielen (RC-TP und RLC-TP) untersucht werden.

Der RC-Tiefpaß ist ein Filter der Ordnung 1, denn er enthält nur einen Energiespeicher, Bild 2.1. Der RLC-Tiefpaß ist von 2. Ordnung und enthält 2 Energiespeicher, Bild 2.2.

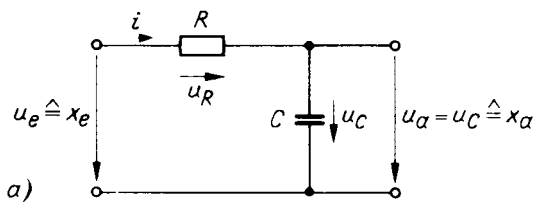


Bild 2.1: Schaltbild eines RC-Tiefpasses

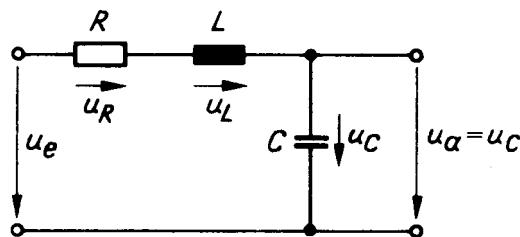


Bild 2.2: Schaltbild eines RLC-Tiefpasses

Die Übertragungsfunktion (ÜTF) dieser Tiefpässe kann mit komplexer Rechnung bestimmt werden, denn beide bilden einen Spannungsteiler. Damit ergibt sich:

$$H_{RC}(\omega) = \frac{U_a(\omega)}{U_e(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega T} \quad T = RC \quad \mathbf{RC-TP} \quad (2.1)$$

$$H_{RLC}(\omega) = \frac{U_a(\omega)}{U_e(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega T + T_0^2(j\omega)^2} \quad T = RC; \quad T_0^2 = LC \quad \mathbf{RLC-TP} \quad (2.2)$$

Die Eigenschwingungen am Ausgang, also für $u_a(t)$, können dann auftreten, wenn $u_e(t)$ 0 ist, also der Eingang kurz geschlossen ist. Dann ist aber auch $U_e(\omega) = 0$ und in den Gleichungen (2.1) und (2.2) wird der Quotient

$$\frac{U_a(\omega)}{U_e(\omega)} = \frac{U_a(\omega)}{0} \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

weil durch 0 dividiert wurde. Dies ist also unabhängig davon, wie groß oder klein die Amplitude der Eigenschwingung tatsächlich wird.

Den Wert ∞ erhält man in den Gleichungen (2.1) und (2.2) andererseits nur dann, wenn die Nennerpolynome zu 0 werden. Es gibt aber keinen Wert von ω , der dieser Bedingung genügt. Um also eine Lösung für dieses Problem zu erhalten, ersetzt man in den Gleichungen (2.1) und (2.2) die Variable $j\omega$ durch eine Variable $s = \zeta + j\omega$:

$$j\omega \implies s = \zeta + j\omega \quad : \text{komplexe Frequenz mit } \zeta : \text{Dämpfungs-Maß} \quad (2.4)$$

Nun lassen sich (komplexwertige) Lösungen für die Nullstellen im Nenner finden. Nullstellen im Nenner ergeben den Wert ∞ für die Übertragungsfunktion, welche hierfür ebenfalls in der Variablen s geschrieben wird.

$$H_{RC}(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = \frac{1}{1 + sT} \quad T = RC \quad \mathbf{RC-TP} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} H_{RLC}(s) &= \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = \frac{1}{1 + sT + T_0^2 s^2} \\ &= \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2} \quad \mathbf{RLC-TP} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Für den RLC-TP werden folgende Abkürzungen verwendet:¹

$$d = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{Dämpfung} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{Resonanzfrequenz} \quad (2.7)$$

Die Nullstellen des Nenners ergeben ∞ Stellen der ÜTF und werden deswegen „Pole“ oder „Polstellen“ der komplexen ÜTF genannt. Durch Null setzen der Nenner-Polynome erhält man daher:

$$s_{RC} = -\frac{1}{T} \quad \mathbf{Polstelle des RC-TP} \quad (2.8)$$

$$s_{RLC,1,2} = -d\omega_0 \pm j\omega_0 \sqrt{1 - d^2} \quad \text{für } d < 1 \quad \mathbf{Polstellen des RLC-TP} \quad (2.9)$$

2.1 Pol-Nullstellen-„Gebirge“

Die Variable s definiert eine Fläche mit den Achsen ζ und $j\omega$. Über dieser Fläche kann man den Betrag der ÜTF, also $|H_{RC}(s)|$ bzw. $|H_{RLC}(s)|$ auftragen. Man kommt damit zu einer dreidimensionalen Darstellung, in der man die Polstellen sehr prägnant sieht. Die hier gewählte Alternative ist die Verwendung von $20 \log_{10}(|H(s)|)/\text{dB}$, also die logarithmische Darstellung. Dies ist vorteilhaft, um den Sperrbereich der Filter deutlicher zeigen zu können.

¹ $Q = 1/2d$ wird als „Güte“ bezeichnet. $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$ ist der Kennwiderstand.

Bild 2.3 ist das PN-Gebirge des RC-TP. Die Schnittlinie durch dieses Gebirge entlang der $j\omega$ Achse stellt den Frequenzgang des RC-TP dar.

Je kleiner die Zeitkonstante T ist, um so weiter weg von der $j\omega$ Achse ist die Polstelle und um so flacher wird die Schnittlinie entlang dieser Achse und um so höher wird die Grenzfrequenz des RC-TP.²

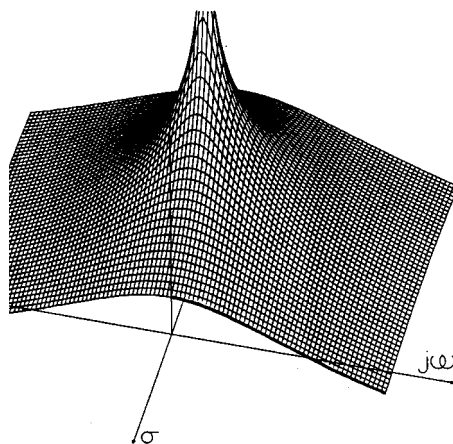


Bild 2.3: PN-Gebirge des RC-TP (σ ersetzen durch ζ)

In Bild 2.4 sind 2 Varianten des PN-Gebirges für den RLC-TP dargestellt. Sie unterscheiden sich in der Größe der Dämpfung d , während die Resonanzfrequenz ω_0 für beide gleich ist.

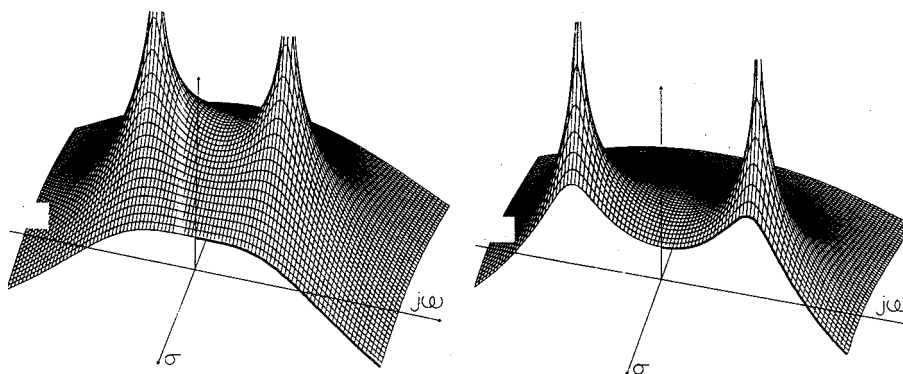


Bild 2.4: PN-Gebirge des RLC-TP; links $d = 1/\sqrt{2}$, rechts $d = 0,25$ (σ ersetzen durch ζ)

Ach hier zeigt die Schnittlinie entlang der $j\omega$ Achse den Betrag des jeweiligen Amplitudengangs. Die Polstellen rücken dabei umso näher an die $j\omega$ Achse heran, je kleiner die Dämpfung ist. Im Grenzfall für Dämpfung $d = 0$ liegen sie genau auf der $j\omega$ Achse. Ein ungedämpfter RLC-TP stellt, eingangsseitig kurz geschlossen mit $u_e(t) = 0$, ein System dar, das eine ungedämpfte Cosinus-Schwingung als Eigenschwingung hat. Polstellen genau auf der $j\omega$ Achse bedeuten also den Grenzfall für die Stabilität eines Systems. Polstellen mit $\zeta < 0$, also links der $j\omega$ Achse wie hier dargestellt, haben abklingende Eigenschwingungen zur Folge.

Andererseits ist ein System mit Polstellen rechts der $j\omega$ Achse instabil, denn es hat dann aufklingende Eigenschwingungen. Die Polstellen-Darstellung eignet sich daher auch zur Untersuchung der Stabilität eines Systems.

Eine ÜTF, die einen RC-Spannungsteiler beschreibt (z.B. die Tastspitze zu einem Oszilloskop), enthält eine Polstelle und eine Nullstelle. Bild 2.5 zeigt das entsprechende „Gebirge“, welches — im Unterschied zu den anderen hier gezeigten — den Betrag der ÜTF linear darstellt, so daß eine Nullstelle auch als Nullstelle erscheint. Regelungstechnisch ist diese ÜTF als PDT_1 Glied bekannt.[6]

²Dies ist in Übereinstimmung mit dem Zeit-Bandbreiten-Gesetz der Nachrichtentechnik.

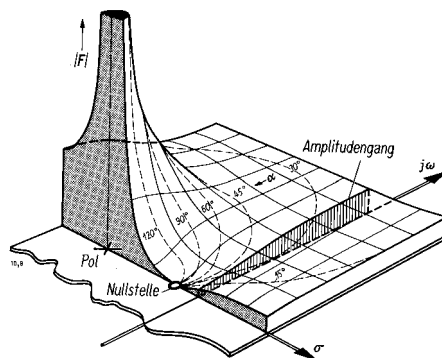


Bild 2.5: PN-Gebirge des RC-Spannungsteilers (lineare Darstellung), PDT_1 (σ ersetzen durch ζ)

3 Typischer Amplitudengang und Dämpfungsverlauf eines Tiefpasses

Den typischen Amplitudengang $|H(\Omega)|$ bzw. Dämpfungsverlauf¹ $a(\Omega) = 20 \log_{10} |H(\Omega)|/dB$ eines TP-Filters zeigt Bild 3.1. Man unterscheidet hierbei zwischen

- Durchlaßbereich (pass band)
- Übergangsbereich (transition band)
- Sperrbereich (stop band)

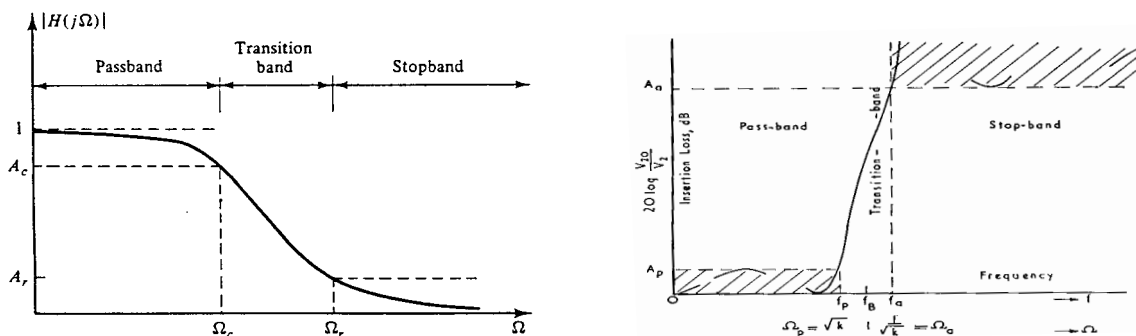


Bild 3.1: Der typische Amplitudengang eines TP-Filters und Toleranz-Schema (links) und Toleranzschema für den Dämpfungsverlauf (rechts)

In Bild 3.1 bedeuten Ω_c die Grenzfrequenz des Durchlaßbereichs, die dadurch charakterisiert ist, daß die Amplitudenkurve auf den Wert A_c abgefallen ist. Die Frequenz Ω_r ist die Frequenz, ab der das Filter alle Eingangssignale um den für den Sperrbereich vorgeschriebenen Wert A_r dämpft.

Bei den Realisierungen der Filter werden die Toleranzbänder für die zulässigen Abweichungen im Durchlaßbereich bzw. im Sperrbereich je nach gewähltem Typ unterschiedlich ausgeschöpft, z.B. monoton fallend oder in Form gleichmäßiger Wellen.

4 Idealisierte Filtereigenschaften

Im Idealfall könnten die Eigenschaften eines Filters wie folgt sein:

- Amplitudengang

¹In der Literatur ist für den Dämpfungsverlauf auch die Bezeichnung $a(\omega)$ üblich. Nicht zu verwechseln mit der Sprungantwort $a(t)$!

- Durchlaßbereich : $|H(\omega)| \equiv 1$ bzw. $a(\omega) \rightarrow 0 \rightsquigarrow$ ungedämpft und konstant
- Sperrbereich : $|H(\omega)| \rightarrow 0$ bzw. $a(\omega) \rightarrow \infty \rightsquigarrow$ sperrt ideal
- Übergangsbereich : $\omega_r - \omega_c \rightarrow 0 \rightsquigarrow$ steil

• Phasengang bzw. Laufzeit

- Phase ¹: $\Theta(\omega) = b(\omega) = \omega t_0 \rightsquigarrow$ linear
- Phasen- und Gruppenlaufzeit : $t_{ph} = \text{konstant}$, $t_{gr} = \text{konstant}$

Da die *Amplituden- und Phasenverläufe* der Filter sich aufgrund der physikalischen Eigenschaften der Filter-Elemente (im analogen Fall) *nicht von einander unabhängig realisierbar* sind, betrachtet man folgende „Grenzfälle“ der Filtereigenschaften als „Ideal-Typen“, siehe Bilder 4.1, 4.2.

- Amplitudenkurve ideal : **Küpfmüller-Tiefpaß**²
- Phasenkurve bzw. Laufzeiten ideal: **Gauß-Tiefpaß**

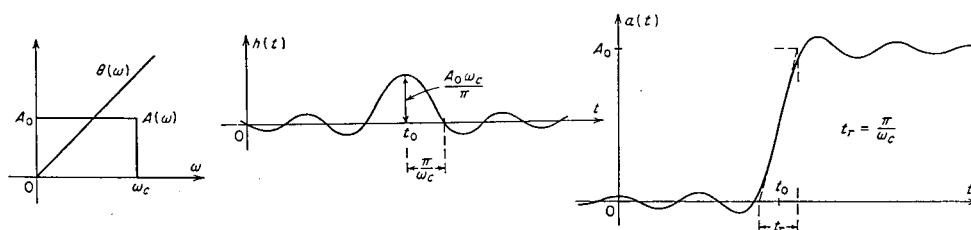


Bild 4.1: Küpfmüller-Tiefpaß als „idealer Tiefpaß“ mit Impuls- und Sprungantwort

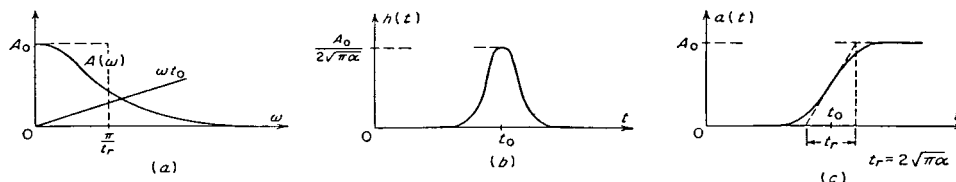


Bild 4.2: Gauß-Tiefpaß mit Impuls- und Sprungantwort

Aus den Impuls- und Sprungantworten erkennt man, daß die Anwendungsgebiete für die beiden „Ideal-Typen“ völlig unterschiedlich sind.

- Küpfmüller-TP : ideal im Frequenzbereich
- Gauß-TP : ideal im Zeitbereich wegen linearer Phase und fehlender Überschwinger

Daraus folgt für die praktische Anwendung der *realisierbaren Näherungen* an diese „Ideal-Typen“:

- **Küpfmüller-Form** : Für Filteraufgaben, bei denen eine frequenzmäßige Trennung gefordert ist, wie z.B. bei der Amplitudenmodulation (AM) oder der Einseitenbandmodulation (SSB)
- **Gauß-Form** : Für die Übertragung *laufzeitkritischer Signale*, wie z.B. Puls-Übertragung, digitale Modulationen, Frequenz-Modulation, Anti-Aliasing-Filter und Rekonstruktions-Filter (in der Digitalen Signalverarbeitung)

¹ $b(\omega)$ wird auch als „Phasenmaß“ bezeichnet.

²Außer der idealen Amplitudenkurve wird meist auch noch eine lineare Phase angenommen. Dieser damit so definierte „ideale Tiefpaß“ ist nicht kausal, wie seine Impulsantwort zeigt. Er dient jedoch in der Praxis dazu, die Einschwingzeiten t_r realer Tiefpässe bequem abschätzen zu können.

5 Realisierungen für die „Ideal-Typen“

Da analoge Filter aus Spulen und Kondensatoren aufgebaut werden, hat man als mathematische Beschreibung für den Amplituden- und Phasengang die Form von *rationalen Funktionen*, also Zählerpolynom dividiert durch Nennerpolynom gewählt, weil dies genau den physikalischen Eigenschaften dieser Filter entspricht.

Für digitale Filter hat man dies als eine der Entwurfsmethoden beibehalten, obwohl es nicht zwingend ist. Es ist jedoch bequem, auf die tabellierten Filterfunktionen zurückzugreifen und diese dann in entsprechende digitale Eigenschaften zu übersetzen, wie z.B. mit Impuls-Invarianz-Transformation oder Bilinear-Transformation.

In der Praxis haben sich daher folgende Funktionen für eine Realisierung ergeben, die meist nach den Mathematikern benannt sind, die die zugehörigen Beziehungen zuerst beschrieben haben.

Amplitudenverlauf: Butterworth, Tschebyscheff, Cauer (oder elliptisch)

Phase & Laufzeit: Bessel, Gauß (kritisch gedämpft)

5.1 Butterworth Filter

Butterworth-Filter haben einen Amplitudengang, der für $\Omega \rightarrow 0$ maximal flach ist, Bild 5.1.

$$|H_n(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2n}} \quad (5.1)$$

Die Ordnung n eines (analogen) Filters gibt dabei die Anzahl der *von einander unabhängigen Energiespeicher*, also der Spulen und Kondensatoren, an. Unabhängig bedeutet, daß die Energiespeicher *von einander unabhängige Anfangsbedingungen* annehmen können. In der komplexen $s = \zeta + j\omega$ Ebene gibt die Ordnung n die Anzahl der Polstellen an. Beim Butterworthfilter liegen diese Polstellen gleichmäßig verteilt auf einem Halbkreis in der linken s Ebene. Der RC-TP und der RLC-TP (mit $d = 1/\sqrt{2}$) sind Butterworth-Filter der Ordnungen 1 bzw. 2.

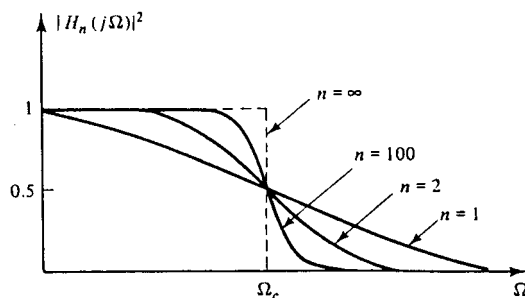


Bild 5.1: Betragsquadrat des Amplitudengangs eines Butterworthfilters

Die Definition des Butterworthfilters nach Gleichung (5.1) führt auf folgende Eigenschaften:

1. $|H_n(0)|^2 = 1$ für alle n
2. $|H_n(\Omega_c)|^2 = 1/2$ für alle n , was bedeutet:
 - $|H_n(\Omega_c)| = 1/\sqrt{2}$
 - $20 \log_{10} |H_n(\Omega_c)| = -3.0103 \text{ dB}$
3. $|H_n(\Omega)|^2$ nimmt *monoton* mit Ω ab.
4. $|H_n(\Omega)|^2$ nähert sich bei sehr hoher Ordnung n einem Küpfmüller-Tiefpaß.
5. $|H_n(\Omega)|^2$ ist *maximal flach* für $\Omega \rightarrow 0$, da alle Ableitungen bis zur Ordnung n verschwinden.

Im Bode-Diagramm erkennt man die Flankensteilheit im Übergangsbereich in Abhängigkeit von der Ordnung n , Bild 5.2

Das PN-Gebirge eines Butterworth-Filters der Ordnung 4 ist in Bild 5.3 dargestellt.

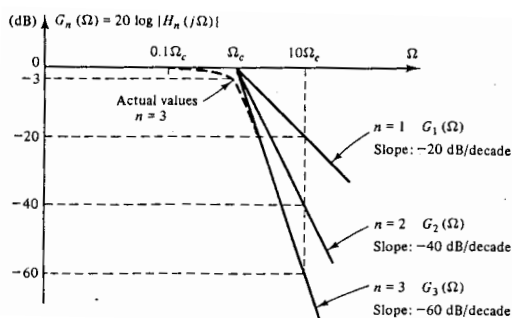


Bild 5.2: Bodediagramm des Butterworth-filters

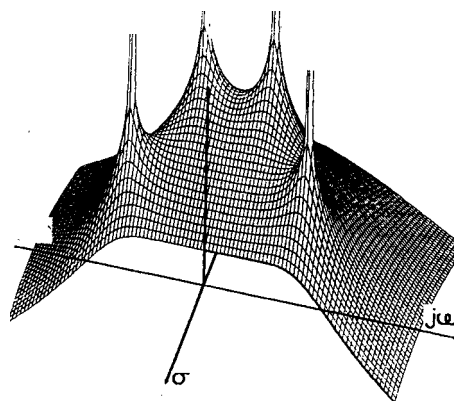


Bild 5.3: PN-Gebirge eines Butterworth-filters 4. Ordnung (σ ersetzen durch ζ)

5.2 Tschebyscheff-Filter

Die Toleranzbänder für die Durchlaßkurve werden bei den Tschebyscheff-Filtern in Form von gleichmäßig Wellen ausgeschöpft. Es gibt 2 Arten dieser Filter:

- Typ 1 : Welligkeit im Durchlaßbereich
- Typ 2 : Welligkeit im Sperrbereich

Im jeweils anderen Bereich verhält sich die Amplitudenkurve monoton. Die Definitionsgleichung für Typ 1 lautet:

$$|H_n(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\Omega)} \tag{5.2}$$

Hierbei ist $T_n(x)$ das Tschebyscheff-Polynom n -ter Ordnung [7], [8]

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos[n \arccos(x)] & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ \cosh[n \operatorname{Arcosh}(x)] & \text{für } x > 1 \end{cases} \tag{5.3}$$

Die Polstellen in der komplexen s -Ebene liegen in diesem Fall auf einer Ellipse. Der Parameter ϵ bestimmt die Größe der Welligkeit.

Die Tschebyscheff-Filter ungeradzahligter Ordnung haben ein Maximum für $\Omega = 0$, Bild 5.4.

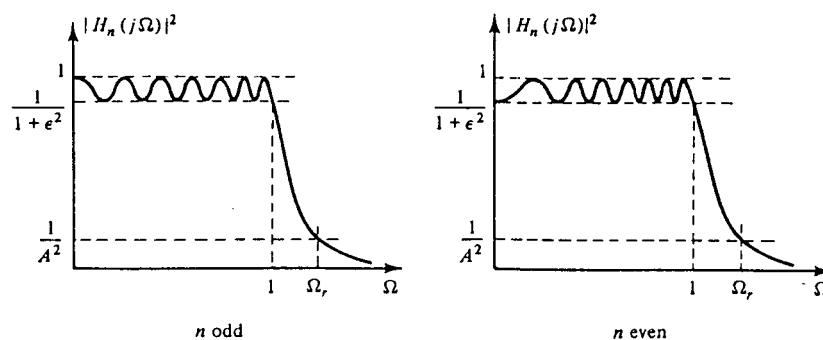


Bild 5.4: Quadrat des Amplitudengangs für Tschebyscheff-Filter ungerader und gerader Ordnung

Im Pol-Nullstellen-Plan liegen die Pole nicht mehr wie beim Butterworth-Filter auf einem Halbkreis, sondern auf einer Ellipse, Bild 5.5. Bild 5.6 zeigt das zugehörige PN-Gebirge für ein Tschebyscheff-Filter 4. Ordnung.

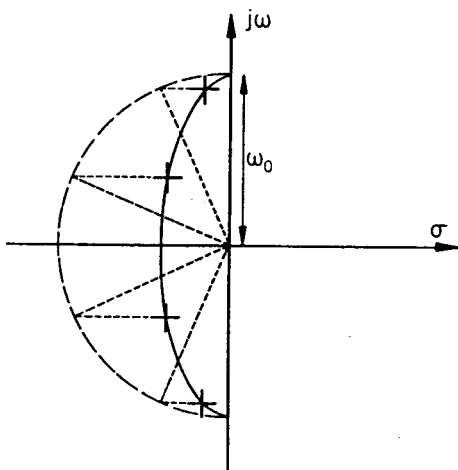


Bild 5.5: Pol-Verteilung des Tschebyscheff-Filters 4. Ordnung (σ ersetzen durch ζ)

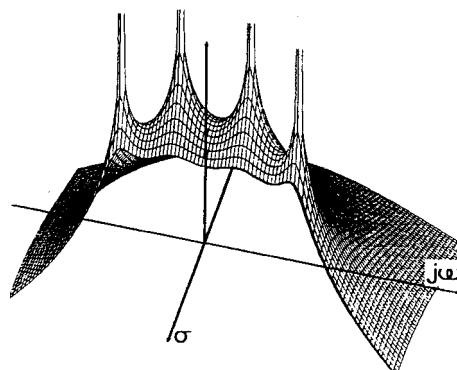


Bild 5.6: PN-Gebirge des Tschebyscheff-Filters 4. Ordnung (σ ersetzen durch ζ)

5.3 Cauer-Filter

Cauer-Filter füllen die Toleranzbereiche für den Durchlaß und den Sperrbereich gleichmäßig aus. Auf diese Weise kommt man mit der kleinsten Ordnung — verglichen mit Butterworth und Tschebyscheff — auf die beste Näherung an die Küpfmüller-Form. Die Definitionsgleichung für Cauer-Filter lautet:

$$|H_n(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 E_n^2(\Omega)} \tag{5.4}$$

Hierbei sind $E_n(x)$ die elliptischen Polynome (Jacobische Polynome).

Bild 5.7 zeigt das Quadrat des Amplitudengangs für ein Cauer-Filter ungeradzahligter Ordnung. Die Welligkeit im Durchlaßbereich wird durch die Größe ϵ festgelegt, die Welligkeit im Sperrbereich durch die Größe A . Die normierte Grenzfrequenz $\Omega = 1$ liegt hier in der geometrischen Mitte zwischen den Grenzfrequenzen Ω_1 und Ω_2 .

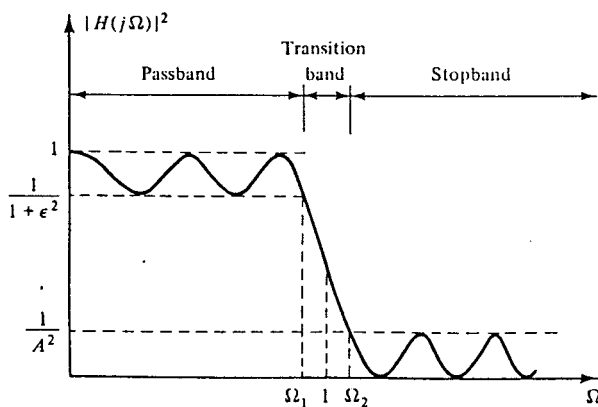


Bild 5.7: Quadrat des Amplitudengangs eines Cauer-Filters

Cauer-Filter haben Nullstellen im Sperrbereich. Diese werden dadurch erzeugt, daß im PN-Plan Nullstellen auf der $j\omega$ Achse liegen. Des weiteren sieht man aus Bild 5.8, daß die Polstellen auf einem Kreis mit größerem Durchmesser liegen, als beim entsprechenden Butterworth-Filter. Im PN-Gebirge erscheinen die Nullstellen als „Trichter“ in Richtung $-\infty$. Dies ist verständlich, wenn beachtet wird, daß in der gewählten logarithmischen Darstellung $20 \log_{10}(0) = -\infty$ ist.

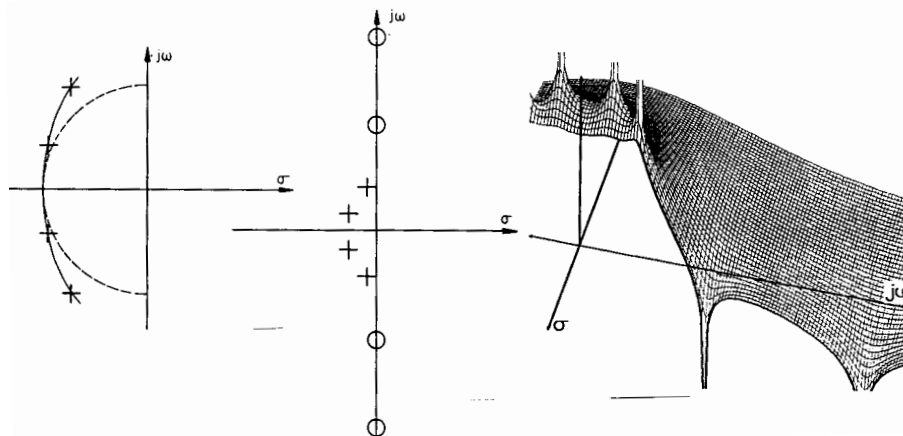


Bild 5.8: PN-Plan und PN-Gebirge des Cauer-Filters 4. Ordnung (σ ersetzen durch ζ)

5.4 Bessel-Filter

Beim Bessel-Filter wird die Gruppen-Laufzeit $t_{gr} = d\Theta/d\omega = db(\omega)/d\omega$ so definiert, daß sie maximal flach wird [2]. Aus diesem Grund eignen sich Bessel-Filter besonders für Anti-Aliasing-Filter und Rekonstruktions-Filter bei der digitalen Realisierung von *Finite Impulse Response* (FIR) Filtern mit linearer Phase. Das Bild 5.9 kann dabei zur Abschätzung der erforderlichen Ordnung für diese Filter dienen.

Die Gleichung für die Übertragungsfunktion lautet:

$$H(\Omega) = \frac{1}{B_n(\Omega)} \tag{5.5}$$

Hierbei sind $B_n(x)$ die Besselschen Polynome. Den Amplitudengang der Bessel-Tiefpässe zeigt Bild 5.9

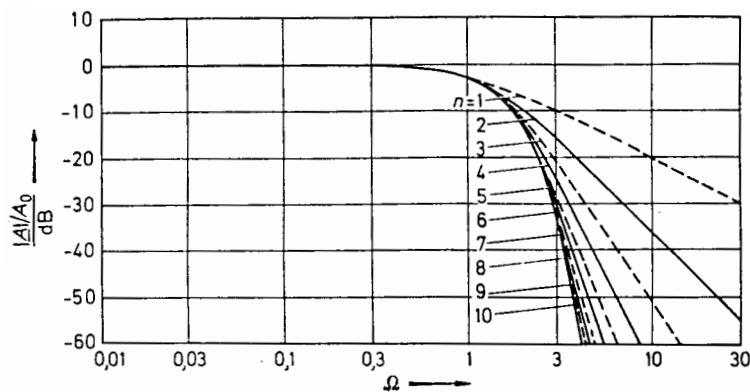


Bild 5.9: Bodediagramm des Amplitudengangs von Bessel-Tiefpässen

5.5 Kritisch gekoppeltes Filter (Gauß-Filter)

Hierbei handelt es sich hierbei um die entkoppelte Serienschaltung von lauter gleichen RC-Tiefpässen. Entkoppelte Serienschaltung bedeutet, daß zwischen den RC-Tiefpässen jeweils ein Trennverstärker mit dem Eingangswiderstand $R_{ein} \rightarrow \infty$ und dem Ausgangswiderstand $R_{aus} \rightarrow 0$ liegt. Die entkoppelte Serienschaltung von Tiefpässen 1. Ordnung (PT_1) ist die beste Approximation für einen Gauß-Tiefpaß mit linearer Phase. Dies folgt mathematisch aus dem *Zentralen Grenzwertsatz, Central Limit Theorem*

Die Formel für die Übertragungsfunktion lautet:

$$H_n(\Omega) = \frac{1}{(1 + j\alpha\Omega)^n} \quad \alpha = \sqrt{\sqrt{2} - 1} \tag{5.6}$$

Die einzelnen Tiefpässe 1. Ordnung besitzen dabei eine um $1/\alpha$ höhere Grenzfrequenz als das gesamte Filter.

5.6 Allpässe

Allpässe sind Filter, die keine Dämpfung haben und nur die Phase verändern. Sie werden als Entzerrerschaltungen eingesetzt. Werden Allpässe analog mit Hilfe von Reaktanzen realisiert, so haben sie Übertragungsfunktionen in der Form¹

$$H(s) = \frac{(1 - sT_1) \cdots (1 - s2dT_n + s^2T_n^2)}{(1 + sT_1) \cdots (1 + s2dT_n + s^2T_n^2)} \quad s = \zeta + j\omega : \text{komplexe Frequenz} \tag{5.7}$$

In der Pol-Nullstellenverteilung der komplexen s -Ebene liegen die Pole links und die Nullstellen dazu bezüglich der $j\omega$ -Achse gespiegelt auf der rechten Seite, Bild 5.10.

Ein System mit Nullstellen in der rechten s -Ebene enthält immer Allpässe. Ein System ohne Nullstellen rechts wird daher *minimalphasig* genannt. Für minimalphasige Systeme gelten eindeutige Zusammenhänge zwischen Betrag und Phase der Übertragungsfunktion, d.h. der Phasengang kann aus dem Amplitudengang berechnet werden und umgekehrt.²

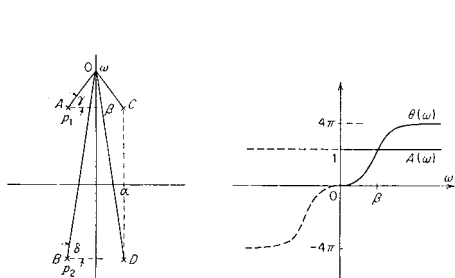


Bild 5.10: Pol-Nullstellen-Verteilung und Übertragungsfunktion eines Allpasses 2. Ordnung

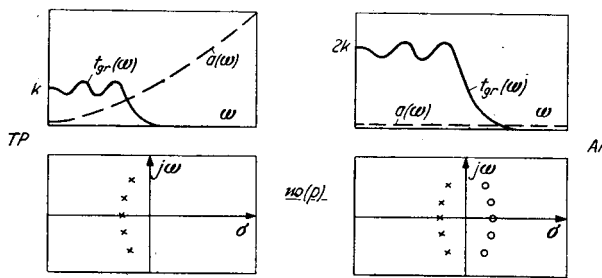


Bild 5.11: Allpaß im Vergleich zu einem Tiefpaß mit gleicher Polstellenverteilung (σ ersetzen durch ζ)

Bild 5.11 zeigt einen Allpaß im Vergleich zu einem Tiefpaß, welcher eine identische Polstellenverteilung wie der Allpaß hat.

Für einen Allpaß 2. Ordnung mit $|H(\omega)| = k > 1$ zeigt Bild 5.12 ein PN-Gebirge. Die Schnittlinie entlang der $j\omega$ Achse ist exakt gerade (dicker gezeichnet).

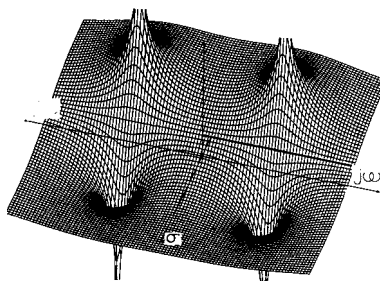


Bild 5.12: PN-Gebirge eines Allpasses 2. Ordnung (σ ersetzen durch ζ)

¹Die Schreibweise entspricht genau derjenigen in der Regelungstechnik.

²In der Regelungstechnik wird dies in Form des Phasenlineals angewendet.

6 Vergleich der verschiedenen Filter-Realisierungen

6.1 Vergleich bezüglich Filtersteilheit

Die Filtersteilheit, definiert als Steilheit des Übergangs vom Durchlaß- zum Sperrbereich, zeigt Bild 6.1 mit den Dämpfungsverläufen $a(\Omega)$ für Butterworth- (oder Potenz-), Tschebyscheff- und Cauer-Filter. Aus dem Vergleich erkennt man, daß die Filtersteilheit für gleiche Ordnung bei Cauerfiltern am größten ist. Größere Flankensteilheit des Filters geht (bei gleicher Ordnung) somit einher mit größerer Welligkeit.

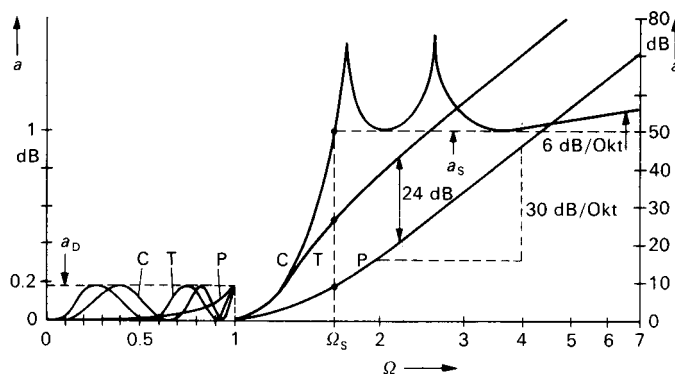


Bild 6.1: Dämpfungsverlauf $a(\Omega)$ für (P) Butterworth-, (T) Tschebyscheff-, (C) Cauer-Filter (gleicher Ordnung)

Einen weiteren Vergleich zeigt Bild 6.2. Hier sind die Amplitudengänge für Filter der Ordnungen 4 und 10 gezeigt.

Zur Abschätzung der Ordnung für ein Anti-Aliasing-Filter oder ein Rekonstruktions-Filter ist zu beachten: Kurve 3 zeigt das Butterworth-Filter, das mit Vielfachen von -20 dB/Dekade zum Sperrbereich übergeht. Das Besselfilter, Kurve 2, das wegen seiner linearen Phase häufig benötigt wird, hat zunächst eine geringere Steilheit. Man benötigt daher für gleiche Sperrwirkung ein Besselfilter höherer Ordnung.

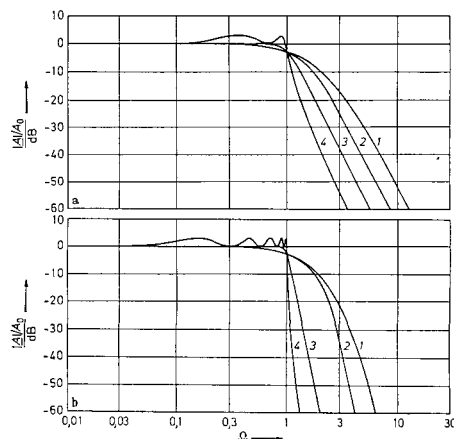


Bild 6.2: Amplitudengänge für Filter 4. und 10. Ordnung. 1: TP mit kritischer Dämpfung (Gauß), 2: Bessel-TP, 3: Butterworth-TP, 4: Tschebyscheff-TP (3 dB Welligkeit)

6.2 Vergleich von Phase, Laufzeit, Sprungantwort

Einen Vergleich bezüglich Gruppenlaufzeit und Phase zeigt Bild 6.3. Filter mit größerer Flankensteilheit im Übergangsbereich haben stärkere Schwankungen der Gruppenlaufzeit, die sich insbesondere in der Nähe des Übergangsbereiches zeigen. Bei einer analogen Lösung kann man nicht einen steilen Übergang und eine

konstante Gruppenlaufzeit zugleich haben.¹ Digitale FIR Filter lassen sich mit exakt linearer Phase und damit konstanter Gruppenlaufzeit realisieren.²

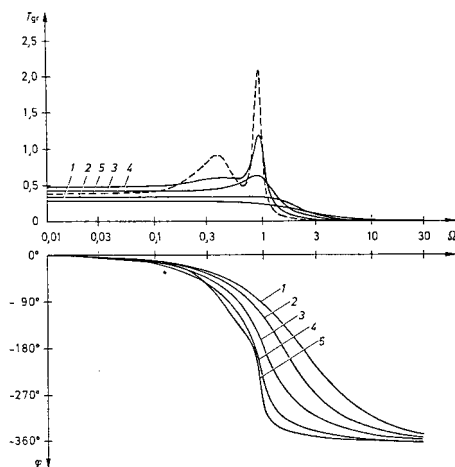


Bild 6.3: Vergleich von Gruppenlaufzeit t_{gr} und Phase φ für Tiefpässe 4. Ordnung. 1: TP mit kritischer Dämpfung (Gauß), 2: Bessel-TP, 3: Butterworth-TP, 4: Tschebyscheff-TP (0.5 dB Welligkeit), 5: Tschebyscheff-TP (3 dB Welligkeit)

Die Sprungantworten ergeben einen Einblick in das Verhalten der Filter im Zeitbereich. Bild 6.4 zeigt einen Vergleich. Für Filter, die für Datensignale verwendet werden sollen, darf die Sprungantwort keine Überschwinger aufweisen.

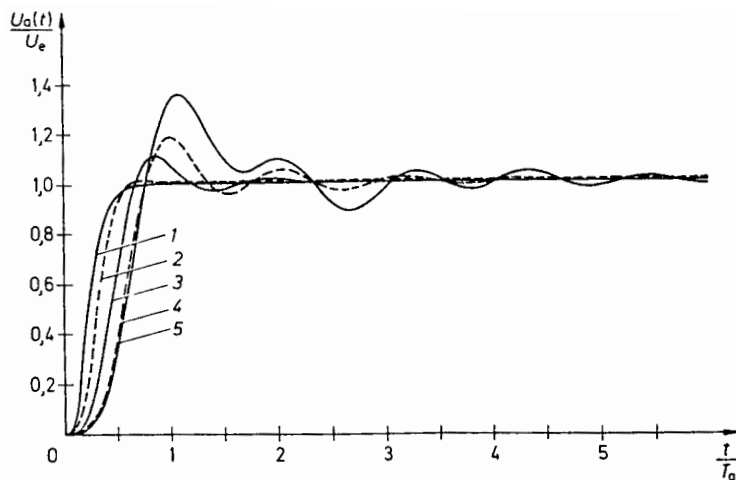


Bild 6.4: Vergleich der Sprungantworten von Tiefpässen 4. Ordnung. 1: TP mit kritischer Kopplung (Gauß), 2: Bessel-TP, 3: Butterworth-TP, 4: Tschebyscheff-TP (0.5 dB Welligkeit), 5: Tschebyscheff-TP (3 dB Welligkeit)

¹Ein analoger Laufzeit-Entzerrer gestattet zwar die Reduzierung der Laufzeit-Unterschiede, jedoch bleibt eine Welligkeit bestehen unter gleichzeitiger Zunahme der Gruppen-Laufzeit insgesamt.

²Digitale Filter haben immer periodische Durchlaßbereiche, weshalb mit Hilfe von Rekonstruktionsfiltern (RKF) die unerwünschten Bereiche unterdrückt werden müssen. Die Flankensteilheiten dieser (analogen) RKF's sind i.a. so gering, daß ihre Gruppenlaufzeit praktisch konstant wird.

Literatur

- [1] Saal, R.: *Handbuch zum Filterentwurf*, AEG-TELEFUNKEN, 1979
- [2] Tietze, U. ; Schenk, Ch.: *Halbleiter-Schaltungstechnik*, 10. A., Springer, 1993
- [3] Kowalski, H. J.: *Berechnung und Aufbau aktiver RC-Filter*, VEB Militärverlag, 1988
- [4] Skwirzynski, J. K.: *Design Theory and Data for Electrical Filters*, Van Nostrand, 1965
- [5] Fritzsche, G.: *Entwurf linearer Schaltungen*, VEB Verlag Technik, 1962
- [6] Oppelt, W.: *Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge*, Verlag Chemie, 5. A., 1972
- [7] Abramowitz & Stegun: *Handbook of Mathematical Functions*, Dover 1964
- [8] Gradshteyn & Ryzhik: *Table of Integrals Series and Products*, Academic Press, 1965