

Lineare Übertragungs-Systeme

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeine Zusammenhänge	1
1.1	Linearität	1
1.2	Zeitinvarianz	2
1.2.1	Zeitinvarianz in der Praxis	2
1.2.2	Zeitvariante Übertragungs-Kanäle	2
1.2.3	Gesteuerte Zeitvarianz	3
1.3	Stabilität	3
1.3.1	Oszillatoren	3
1.4	Kausalität	3
1.4.1	Nicht kausale Modell-Systeme	4
2	Impulsantwort und Sprungantwort	4
2.1	Impulsantwort	4
2.2	Sprungantwort	4
2.2.1	Sprungantwort kausaler Systeme	5
2.2.2	Bezeichnungsweisen	6
3	Übertragungsfunktion in Betrag und Phase	6
3.1	Symmetrien der Übertragungsfunktion	6
3.1.1	Beispiel: RC-TP	7
3.1.2	Übertragungsfunktion im I und Q Zweig	8
3.1.3	Phase und Laufzeit	8
3.1.4	Phasenverzerrung bei Basisband-Systemen	9
3.1.5	Phasenverzerrungen bei Bandpaß-Systemen	10
3.1.6	Phasen-Messung	12
3.1.7	Phasenschwankungen unterschiedlicher Periodendauer	13
3.1.8	Messung der Gruppenlaufzeit	13
3.2	Impulsantwort aus Betrag und Phase der Übertragungsfunktion	14
3.2.1	Die Impulsantwort eines linearphasigen Systems	15
3.2.2	Linearphasige Filter in der Digitalen Signalverarbeitung	16
3.3	Sprungantwort aus Betrag und Phase der Übertragungsfunktion	16
3.3.1	Die Sprungantwort eines linearphasigen Systems	17
3.4	Das verzerrungsfreie System	18
4	Kausalitätsbedingungen	18
4.1	Fensterung und Sperrbedingung	19
4.1.1	Lineare Phase vorgegeben, Amplitudengang gesucht	19
4.1.2	Amplitudengang vorgegeben, Phase gesucht	20
4.2	Minimalphasen-System	20
4.2.1	Allpaß-Systeme und Laufzeit-Entzerrer	20
4.3	Hilbert-Transformation	21
5	Fast lineare Übertragungs-Systeme	23
5.1	Klirrfaktor	23
5.1.1	Mathematische Modelle der Nichtlinearitäten	23
5.1.2	Die Auswirkung einer Nichtlinearität auf das Spektrum der Ausgangsspannung	23
5.1.3	Cosinusförmiges Eingangssignal : Klirrfaktoren	23
5.1.4	Leistung im Zeit- und Frequenzbereich	24
5.1.5	Definition des Klirrfaktors	24
5.1.6	Summe von zwei cosinusförmigen Eingangssignalen : Differenzton, Verzerrungsfaktor	26
5.2	Interception-Punkt	26
5.2.1	Interception-Punkt für die Klirrfaktoren und Klirr-Dämpfung	26
5.2.2	Interception-Punkt für Zweitton-Aussteuerung: Intermodulation	28

5.2.3	Verzerrungs-Messung	29
5.3	Rechteckförmige Spektralbelegung des Eingangssignals	29
5.3.1	Rauschkliir-Messung	30
5.4	Nichtlineare Verzerrungen bei Tiefpaß-, Bandpaß-, Hochpaß-Systemen	30
6	Systeme mit starker Nichtlinearität	31

Abbildungsverzeichnis

1.1	Darstellungsweisen für die Wirkung der Eingangsfunktion eines Übertragungssystems auf die Ausgangsfunktion	1
1.2	Kennlinie $u_a(t) = f[u_e(t)]$ eines Systems mit linearem Arbeitsbereich	2
1.3	1 dB Kompressions-Punkt eines Verstärkers als praktische Grenze für den linearen Aussteuerungsbereich	2
1.4	Beispiel eines Zeit-invarianten Systems	2
1.5	Abtaster als Beispiel eines Zeit-varianten linearen Systems	3
1.6	Beispiele für kausale ($\tau \geq 0$) und nicht kausale ($\tau < 0$) Impuls-Antworten	3
2.1	Zusammenhang von Impuls-Funktion $\delta(t)$ und Sprung-Funktion $\sigma(t)$	4
2.2	Beispiel für den Zusammenhang von Impuls-Antwort $h(t)$ und Sprung-Antwort $a(t)$ eines (kausalen) Systems	5
3.1	Beispiel für den Amplitudengang $A(\omega)$ und den Phasengang $\Theta(\omega) = -\phi(\omega)$ eines TP-Systems	6
3.2	RC-Tiefpaß	7
3.3	RC-Tiefpaß: Impulsantwort, Übertragungsfunktion real & imaginär, Betrag & Phase, Ortskurve)	7
3.4	Prinzip der Digitalübertragung mit komplexer Signalverarbeitung im Basisband	8
3.5	Symmetrien von Zeitfunktion und Spektraldichte	8
3.6	Ein verzerrungsfreies System hat einen linearen Phasengang $\Theta(\omega) = b(\omega) = \omega t_0$	9
3.7	Definition von Phasen- und Gruppenlaufzeiten bei Systemen mit nichtlinearem Phasengang $\Theta(\omega)$	9
3.8	Auswirkung einer Phasenverschiebung eines Allpasses auf die Kurvenform der Zeitfunktion. Die Amplituden der Komponenten sind unverändert.	10
3.9	Auswirkung von Phasen- und Gruppenlaufzeit im Zeitbereich, wobei t_{gr} konstant ist. Bei konstanter Gruppenlaufzeit $t_{gr} = \text{const}$ bleibt die Form der Hüllkurve eines modulierten Signals unverzerrt. Jedoch ist der Verlauf der Zeitfunktion unterschiedlich, weil $t_{ph} \neq t_{gr}$ ist.	11
3.10	Nicht lineare Phase und nicht konstante Gruppenlaufzeit (Gruppenlaufzeitverzerrung)	11
3.11	Verzerrung der Hüllkurve eines modulierten Daten-Symbols infolge von Gruppenlaufzeitverzerrung	11
3.12	Ein Bandpaß-System ist frei von Phasenverzerrungen, wenn die extrapolierten Phasenverläufe die Θ -Achse bei $n2\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) schneiden. B_Ω ist die Bandbreite des Systems.	12
3.13	Prinzipien der Phasen-Messung	12
3.14	Bei gleicher Amplitude wirken sich Phasenschwankungen stärker als Schwankungen der Gruppenlaufzeit aus, wenn die Phasen-Rippel enger sind.	13
3.15	Messung der Gruppenlaufzeit nach Nyquist (Schleifen-Messung)	13
3.16	Messung der Gruppenlaufzeit nach Nyquist (Strecken-Messung)	14
3.17	Messung der Gruppenlaufzeit und der Dämpfung nach Nyquist	14
3.18	Tiefpaß mit linearer Phase: Impulsantwort (gerade bezüglich $t = t_0$); Sprungantwort (ungerade bezüglich $t = t_0, a(\infty)/2$). t_r = mittlere Breite der Impulsantwort = Anstiegszeit der Sprungantwort.	16
3.19	Blockschaltbild eines FIR-Filters: lineare Phase möglich	16
3.20	Blockschaltbild eines IIR-Filters: i.a. keine lineare Phase möglich	16
3.21	Bei einem verzerrungsfreien System ist die Ausgangsspannung ähnlich zur Eingangsspannung.	18
3.22	Ein verzerrungsfreies System hat einen linearen Phasengang $\Theta(\omega) = b(\omega) = \omega t_0$ und einen konstanten Amplitudengang $A(\omega) = K$	18
4.1	Beispiel für die Fensterung mit einem Rechteckfenster $p_{t_0}(t - t_0)$	19
4.2	Kausales System mit rechteckförmiger Durchlaßkurve	20
4.3	Beispiel einer Übertragungsfunktion eines Allpasses	21
4.4	Aufspalten einer kausalen Impulsantwort in ihren geraden und ungeraden Teil	21
4.5	Beispiel für die Hilbert-Transformation im Frequenzbereich mit den zugehörigen Impulsantworten	22
5.1	Spektralanteile durch nichtlineare Verzerrung einer Cosinus-Spannung	24
5.2	Die Leistung eines periodischen Signals in Zeit- und Frequenzbeich	25
5.3	Messung des Klirrfaktors (breitbandig)	25
5.4	Messung des Klirrfaktors (selektiv)	26

5.5	Spektralanteile durch nichtlineare Verzerrung 2. Ordnung der Summe von 2 Cosinus-Spannungen	26
5.6	Intercept-Punkte IP_2 und IP_3 (Intermodulation), sowie IP_{k_2} und IP_{k_3} (Klirrfaktor) im Diagramm Ausgangs-Pegel P_a als Funktion des Eingangs-Pegels P_e eines Übertragungs-Systems.	27
5.7	Zeitfunktion bei der Zweitonaussteuerung: Die Kennlinie wird durchgewobbelt	28
5.8	Betrags-Spektrum bei Zweitonaussteuerung (bis 3. Ordnung) und die dabei entstehenden Klirr- und Intermodulations-Abstände	28
5.9	Prinzip der Messung der Steilheitsverzerrungen mit dem Intermodulations-Verfahren	29
5.10	Störspektrum bei gleichförmiger Belegung des Spektrums durch das Eingangssignal auf Grund einer quadratischen Nichtlinearität	30
5.11	Prinzip des Rauschkirrmeßverfahrens	30
5.12	Tiefpaß, Bandpaß, Hochpaß	31
6.1	Schwingkreis mit Sättigungs-Erscheinungen der Induktivität: Ferro-Resonanz	32

Lineare Übertragungs-Systeme

1 Allgemeine Zusammenhänge

Für ein Übertragungssystem gilt allgemein der Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsspannung:

$$u_a(t) = \mathcal{W}\{u_e(t)\} \quad (1.1)$$

- $u_a(t)$ ist die Wirkung \mathcal{W} von $u_e(t)$.

Mathematisch ist \mathcal{W} ein Operator oder eine Transformation. Für lineare zeitinvariante Systeme ist \mathcal{W} im Zeitbereich die Faltungsoperation und im Frequenzbereich die Multiplikation mit der Übertragungsfunktion $H(\omega)$ bzw. der Systemfunktion $H(s)$, Bild 1.1.

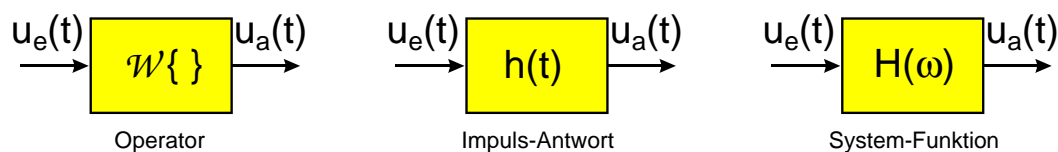


Bild 1.1: Darstellungsweisen für die Wirkung der Eingangsfunktion eines Übertragungssystems auf die Ausgangsfunktion

1.1 Linearität

Für ein lineares System gilt der **Überlagerungssatz**:

- **Gesamtwirkung = Summe aller Teilwirkungen**

Stellt man eine Eingangsspannung als Summe von Teilspannungen (z.B. Fourier-Zerlegung) dar, also

$$u_e(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + \dots + u_N(t) = \sum_{i=0}^N u_i(t) \quad , \quad (1.2)$$

so ist die Ausgangsspannung die Summe der Teilwirkungen.

$$u_a(t) = \mathcal{W}\left\{\sum_{i=0}^N u_i(t)\right\} = \sum_{i=0}^N \mathcal{W}\{u_i(t)\} \quad (1.3)$$

Aus Gleichung (1.3) folgt auch der Spezialfall für die Erhöhung der Amplitude um einen Faktor k .

$$k \cdot u_a(t) = \mathcal{W}\{k \cdot u_e(t)\} = k \cdot \mathcal{W}\{u_e(t)\} \quad (1.4)$$

- Die Amplitude der Ausgangs-Spannung ist **exakt proportional** zur Amplitude der Eingangs-Spannung.

Linearität ist für Übertragungssysteme von *großer Wichtigkeit*. In der Praxis hat dabei die Auswirkung im Spektrum die größere Bedeutung gegenüber dem linearen Zusammenhang der Amplituden von Ein- und Ausgangsspannung. Dies rührt daher, daß durch **nichtlineare Verzerrungen** neue, meist **störende Spektralanteile** entstehen.

Reale Systeme erfüllen die LTI-Bedingungen i.a. nur näherungsweise, d.h. Linearität ist nur innerhalb gewisser Aussteuerungsgrenzen erreichbar. Kleine Abweichungen von der Linearität werden durch **Klirrfaktoren** oder **Verzerrungsfaktoren** beschrieben, siehe Kapitel 5, Seite 23. Jenseits seiner Aussteuerungsgrenzen ist das System übersteuert und damit nichtlinear, Bild 1.2 und Bild 1.3.

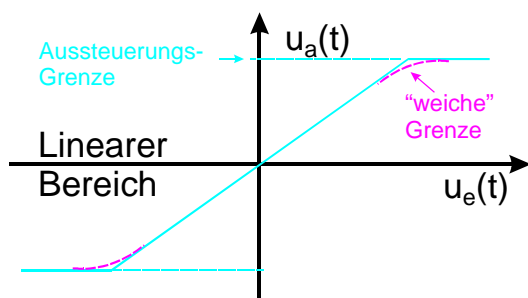


Bild 1.2: Kennlinie $u_a(t) = f[u_e(t)]$ eines Systems mit linearem Arbeitsbereich

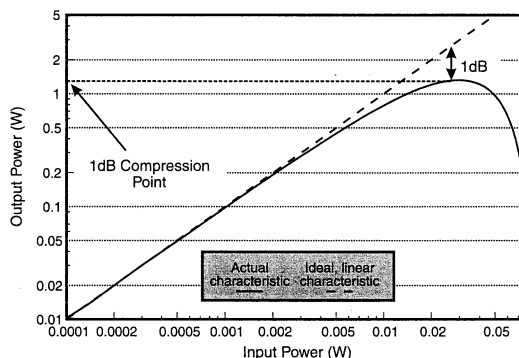


Bild 1.3: 1 dB Kompressions-Punkt eines Verstärkers als praktische Grenze für den linearen Aussteuerungsbereich

1.2 Zeitinvarianz

Zeitinvarianz bedeutet, daß sich die Eigenschaften eines Übertragungssystems nicht zeitlich verändern. Wenn also gilt

$$u_a(t) = \mathcal{W} \{u_e(t)\} \quad , \quad (1.5)$$

so ist für beliebige Zeitverschiebung t_0 , Bild 1.4:

$$u_a(t - t_0) = \mathcal{W} \{u_e(t - t_0)\} \quad (1.6)$$

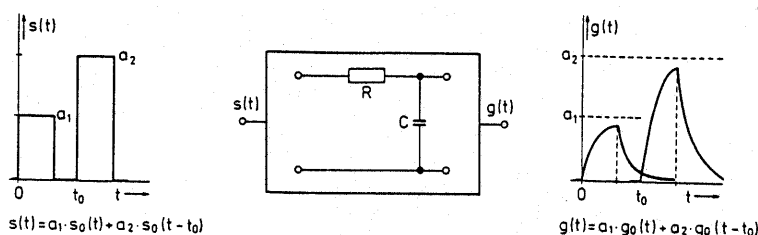


Bild 1.4: Beispiel eines Zeit-invarianten Systems

1.2.1 Zeitinvarianz in der Praxis

Zeitinvarianz ist die Frage nach der Konstanz der System-Parameter. Diese unterliegen normalerweise einem Alterungsprozeß und daher einer längerfristigen Varianz. Zeitvarianz vom Typ *Wackelkontakt* oder *Alterschwäche* ist bei Übertragungssystemen nicht erwünscht.

1.2.2 Zeitvariante Übertragungs-Kanäle

Eine andere Art der Zeitvarianz liegt z.B. beim **Funk-Kanal** vor. Hier hat man im Regelfall infolge von Reflexionen mehrere parallele Übertragungswege, die sich zeitlich ändern, wenn sich Sender und/oder Empfänger und/oder Reflektoren bewegen (Mobilfunk) oder wenn (nur) die reflektierenden Medien sich bewegen oder ändern (ionosphärische Übertragung über Kurzwellen). Man erhält dadurch eine Zeit-variante Impulsantwort.

$$h(t) \rightarrow h(t, \tau) \quad (1.7)$$

Die Variable t beschreibt den Zeitpunkt der Messung und τ Auswirkung der (unterschiedlichen) Echo-Zeiten und der zeitlichen Veränderung der Echos.

1.2.3 Gesteuerte Zeitvarianz

Daneben gibt es (lineare) Systeme, deren Parameter gesteuert werden (die also zeitvariant sind), wie z.B. Schalter, Abtaster, Modulatoren usw. Diese sehr wichtige Gruppe stellt gesteuerte lineare Systeme dar, Bild 1.5. Diese *gesteuerte Zeitvarianz*, wie z.B. ein *Schalter* oder ein *Umpoler* wird technisch angewendet, beispielsweise zum Modulieren (Modulatoren im Schaltbetrieb), z.B. bei den Amplituden-Modulationen bzw. Digitalen Modulationen.

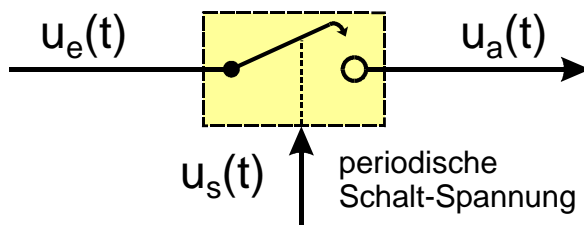


Bild 1.5: Abtaster als Beispiel eines Zeit-varianten linearen Systems

1.3 Stabilität

Für ein Übertragungssystem ist Stabilität eine unabdingbare Voraussetzung. Hier reicht als Voraussetzung, daß für endliches Eingangssignal auch ein endliches Ausgangssignal folgt. Die so definierte Stabilität wird BiBo-Stabilität (*bounded input bounded output*) genannt.

$$\text{Für } |u_e(t)| < M < \infty \text{ folgt } |u_a(t)| < M \cdot V < \infty \quad (1.8)$$

- M ist z.B. die maximal zulässige Amplitude für die Eingangsgröße (ohne daß der lineare Aussteuerungsbereich überschritten wird).
- V ist eine Systemkonstante, z.B. die Verstärkung.

1.3.1 Oszillatoren

Systeme, die trotz fehlender Eingangsspannung eine Ausgangsspannung liefern, sind z.B. Oszillatoren. Diese haben in der Übertragungstechnik eine wichtige Funktion, beispielsweise in der Bereitstellung eines Hochfrequenz-Trägers.

1.4 Kausalität

Kausalität bedeutet, daß die Wirkung \mathcal{W} nicht **vor** der Ursache ($\tau < 0$) eintreten kann, Bild 1.6. Dies ist eine Selbstverständlichkeit für alle realisierbaren Systeme.

$$\text{Für } u_e(t) \equiv 0 \text{ für } t < t_0 \text{ folgt } u_a(t) \equiv 0 \text{ für } t < t_0 \quad (1.9)$$

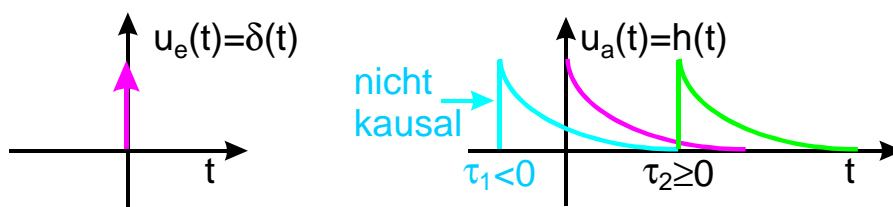


Bild 1.6: Beispiele für kausale ($\tau \geq 0$) und nicht kausale ($\tau < 0$) Impuls-Antworten

1.4.1 Nicht kausale Modell-Systeme

Wird ein System in der *systemtheoretischen Betrachtungsweise* dadurch definiert, daß man zu einer *gegebenen Eingangsgröße* $u_e(t)$ bzw. $U_e(\omega)$ eine *gewünschte Ausgangsgröße* $u_a(t)$ bzw. $U_a(\omega)$ vorschreibt, kann es leicht vorkommen, daß die Kausalitätsbedingungen verletzt werden. Ein so definiertes System ist dann *nicht kausal*. Ein Beispiel hierzu ist der **ideale Tiefpaß**, welcher eine **rechteckförmige Durchlaßkurve** $\Pi_{\omega_c}(\omega)$ hat und dessen Impulsantwort einen $\frac{\sin(x)}{x}$ förmigen Verlauf aufweist und damit nicht kausal ist.

In der Praxis benutzt man trotzdem derartig definierte Systeme, weil diese einerseits sehr einfach zu berechnen sind und andererseits mit oft ausreichender Genauigkeit ein reales — und damit kausales — System beschreiben. Dadurch ergeben sich in der Praxis *sehr einfache Formeln zur näherungsweise Berechnung von Systemeigenschaften*, wie z.B. Bandbreite, Anstiegszeit usw.

2 Impulsantwort und Sprungantwort

2.1 Impulsantwort

Im Frequenzbereich gilt der Zusammenhang:

$$U_a(\omega) = H(\omega) \cdot U_e(\omega) \quad (2.1)$$

Damit ergibt sich im Zeitbereich die Faltung:

$$u_a(t) = h(t) * u_e(t) \quad (2.2)$$

Wählt man für die Eingangsgröße einen δ -Impuls (als Idealisierung eines Nadelimpulses)¹,

$$u_e(t) = (\hat{U} \cdot T) \cdot \delta(t) \quad (2.3)$$

folgt für die Ausgangsgröße

$$u_a(t) = h(t) * (\hat{U} \cdot T) \cdot \delta(t) = (\hat{U} \cdot T) \cdot h(t) \quad h(t) : \text{Impulsantwort} \quad (2.4)$$

Die Impulsantwort $h(t)$ hat die Einheit [1/sec] und damit die Dimension [1/Zeit], weil die Fouriertransformierte $H(\omega)$ dimensionslos ist, wie man aus Gl. (2.1) und (2.4) erkennt.

2.2 Sprungantwort

Integriert man die δ -Funktion $\delta(t)$ von $-\infty$ **mit laufender oberer Grenze** t , erhält man die Sprungfunktion $\sigma(t) = \varepsilon(t)$.

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad \text{oder entsprechend} \quad \frac{d\sigma(t)}{dt} = \delta(t) \quad (2.5)$$

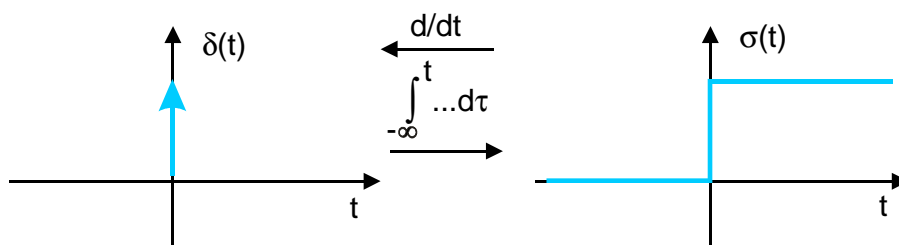


Bild 2.1: Zusammenhang von Impuls-Funktion $\delta(t)$ und Sprung-Funktion $\sigma(t)$

¹Die Dimension eines δ -Impulses ist [1/Zeit], siehe das Kapitel „Die Fourier-Transformation und ihre Anwendungen“, Teil 2, „Einheit des δ -Impulses“. Die Impulsantwort $h(t)$ hat ebenfalls die Dimension [1/Zeit].

Die gleichen Zusammenhänge wie sie zwischen Impuls und Sprung bestehen, gelten auch für ihre Antworten, $h(t)$ bzw. $a(t)$, Bild 2.2.

$$a(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad \text{oder entsprechend} \quad \frac{d a(t)}{dt} = h(t) \quad (2.6)$$

Die **Sprung-Antwort** ergibt sich aus dem **Integral über die Impuls-Antwort**

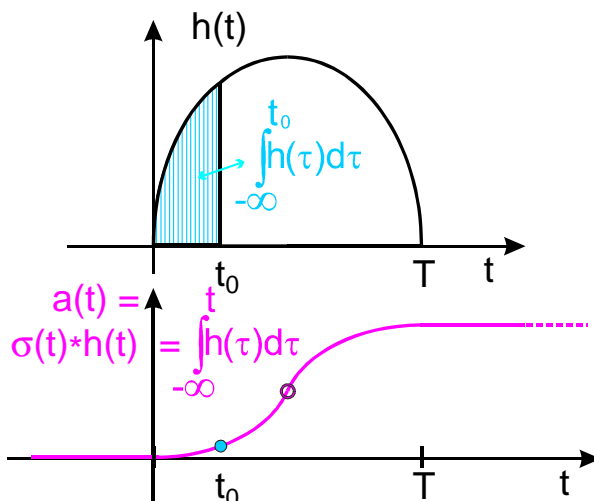


Bild 2.2: Beispiel für den Zusammenhang von Impuls-Antwort $h(t)$ und Sprung-Antwort $a(t)$ eines (kausalen) Systems

Mit Hilfe der Faltung, Gleichung (2.2), ergibt sich für ein Eingangssignal

$$u_e(t) = \hat{U}\sigma(t) \quad (2.7)$$

damit eine Ausgangsspannung von :

$$u_a(t) = h(t) * \hat{U}\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{U}\sigma(t-\tau) d\tau = \hat{U} \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad (2.8)$$

Hierbei wurde die *gespiegelte* Sprungfunktion

$$\sigma(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\infty \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{für } \tau > t \end{cases} \quad (2.9)$$

in den Integralgrenzen berücksichtigt.

2.2.1 Sprungantwort kausaler Systeme

Mit der Gleichung (1.9) gilt

$$h(t) \equiv 0 \quad \text{für } t < 0 \quad . \quad (2.10)$$

Damit ergibt sich für die Sprungantwort:

$$a(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau \quad (2.11)$$

Die Integralgrenzen beginnen für kausale Systeme bei $t = 0$.

Rampen-Funktion

Integriert man die Sprungfunktion in entsprechender Art, kommt man zur Rampenfunktion. Die zugehörige Antwort ist die Rampenantwort und kann wieder über eine Integration aus einer Sprungantwort gewonnen werden. Rampenfunktion und Rampenantwort werden in der Regelungstechnik verwendet.

2.2.2 Bezeichnungen

In der **übertragungstechnischen Literatur** sind die Buchstaben

- $h(t)$: **Impulsantwort = Stoßantwort**
- $a(t)$: **Sprungantwort**

üblich, wohingegen in der **regelungstechnischen Literatur** die Buchstaben und z.T. auch die Bezeichnungen anders gewählt sind:

- $g(t)$: **Gewichtsfunktion = Impulsantwort**
- $h(t)$: **Übergangsfunktion = Sprungantwort**

Die Verwendung von $h(t)$ in zweierlei Bedeutung kann zu Verwechslungen führen! Hier zeigt es sich wieder, daß es vorteilhafter ist, **mit Begriffen anstatt mit Formelzeichen** zu arbeiten.

3 Übertragungsfunktion in Betrag und Phase

Meßtechnisch gewinnt man die Übertragungsfunktion nach Betrag und Phase (und nicht nach Real- und Imaginärteil).

3.1 Symmetrien der Übertragungsfunktion

Die Impulsantwort $h(t)$ ist eine **reelle Zeitfunktion**. Sie kann in einen geraden (even) und einen ungeraden (odd) Teil zerlegt werden.

$$h(t) = \underbrace{h_e(t)}_{\text{reell, gerade}} + \underbrace{h_o(t)}_{\text{reell, ungerade}} \quad (3.1)$$

Mit den **Symmetrie - Eigenschaften** der Fouriertransformation folgt für die Übertragungsfunktion $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \underbrace{H_e(\omega)}_{\text{reell, gerade}} + \underbrace{j \cdot H_o(\omega)}_{\text{imaginär, ungerade}} \quad (3.2)$$

Daraus folgt für den **Amplitudengang** $A(\omega)$ eine **Spiegel-Symmetrie** und für den **Phasengang** $\Theta(\omega)$ eine **Punkt-Symmetrie**, Bild 3.1:

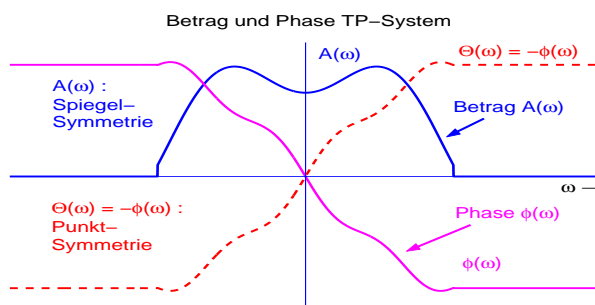


Bild 3.1: Beispiel für den Amplitudengang $A(\omega)$ und den Phasengang $\Theta(\omega) = -\phi(\omega)$ eines TP-Systems

$$A(\omega) = \sqrt{H_e^2(\omega) + H_o^2(\omega)} \quad : \text{gerade in } \omega \quad (3.3)$$

$$\Theta(\omega) = -\Phi(\omega) = -\arctan \left\{ \frac{H_o(\omega)}{H_e(\omega)} \right\} \quad : \text{ungerade in } \omega \quad (3.4)$$

In der **praktischen Meßtechnik** wird der **Amplitudengang in dB** angegeben und dann als Dämpfungsgang mit $a(\omega)$ bezeichnet.

$$a(\omega) = 20 \log_{10} A(\omega) \quad \text{Dämpfungsgang} \quad (3.5)$$

Entsprechend wird die Phase mit $b(\omega)$ bezeichnet.

$$\Theta(\omega) = b(\omega) \quad \text{Phasengang, Phasen-Maß} \quad (3.6)$$

3.1.1 Beispiel: RC-TP

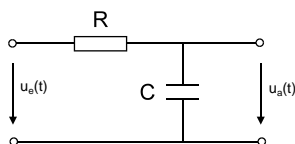


Bild 3.2: RC-Tiefpaß

Für das Beispiel eines RC-Tiefpasses, Bild 3.2, zeigt Bild 3.3 die Impulsantwort $h(t)$, die Übertragungsfunktion nach **Real-** und **Imaginärteil** $\text{Re}\{H(\omega)\}$ $\text{Im}\{H(\omega)\}$ und nach **Betrag** $A(\omega)$ und **Phase** $\Phi(\omega) = -\Theta(\omega)$ sowie die **Ortskurve**, die für dieses Beispiel ein exakter Kreis ist, wenn sie von $\omega = -\infty$ bis $\omega = \infty$ durchlaufen wird.

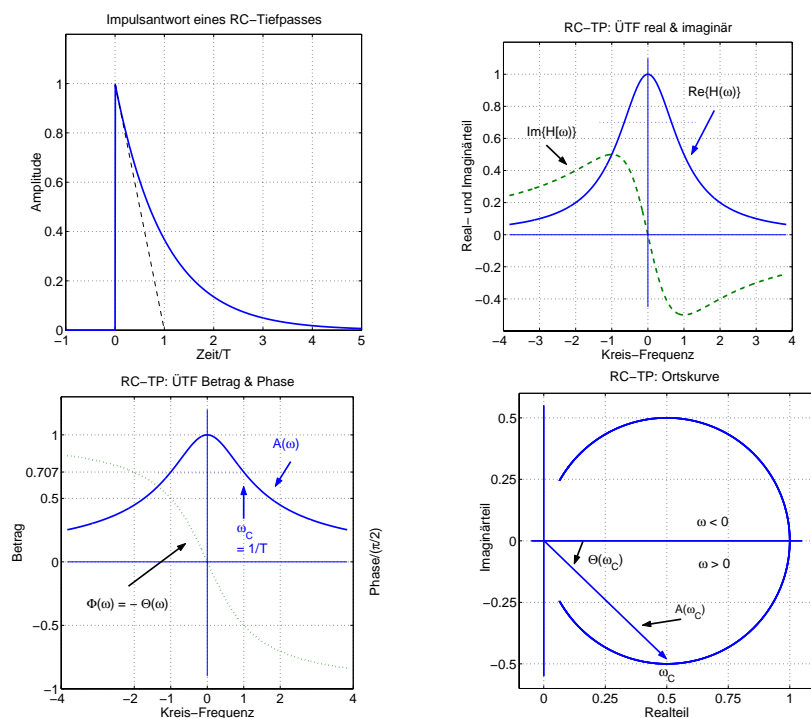


Bild 3.3: RC-Tiefpaß: Impulsantwort, Übertragungsfunktion real & imaginär, Betrag & Phase, Ortskurve)

Die Übertragungsfunktion weist Symmetrien auf, obwohl die Impulsantwort keine Symmetrien hat. Soll die **Impulsantwort** Symmetrien aufweisen, ist hierfür eine **lineare Phase** der Übertragungsfunktion erforderlich, siehe Abschnitt 3.2.1

3.1.2 Übertragungsfunktion im I und Q Zweig

Bei der (digitalen) Signalverarbeitung von Bandpaß-Signalen als I & Q Signale im Basisband hat man (formal) **komplexe** Zeitsignale, Bild 3.4. Dies ist immer dann zu beachten, wenn eine Operation ausgeführt werden soll, wo die beiden Signal-Ströme sich mischen, wie z.B bei einer (komplexen) Multiplikation, bei einer (komplexen) Faltung oder einer (komplexen) Korrelation.

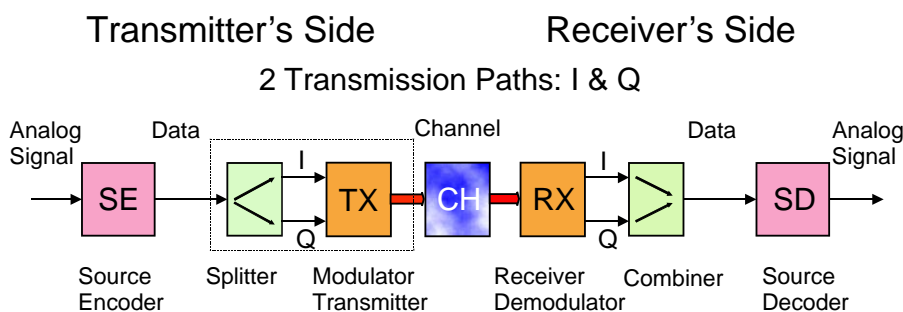


Bild 3.4: Prinzip der Digitalübertragung mit komplexer Signalverarbeitung im Basisband

Tritt keine Vermischung der I & Q Datenströme ein, gelten für den Q Datenstrom die gleichen Symmetriebedingungen wie beim I Datenstrom. Dies erkennt man auch aus den Symmetrien von Zeitfunktionen (bzw. Impulsantworten) und Spektralverteilungen (bzw. Übertragungsfunktionen), Bild 3.5.

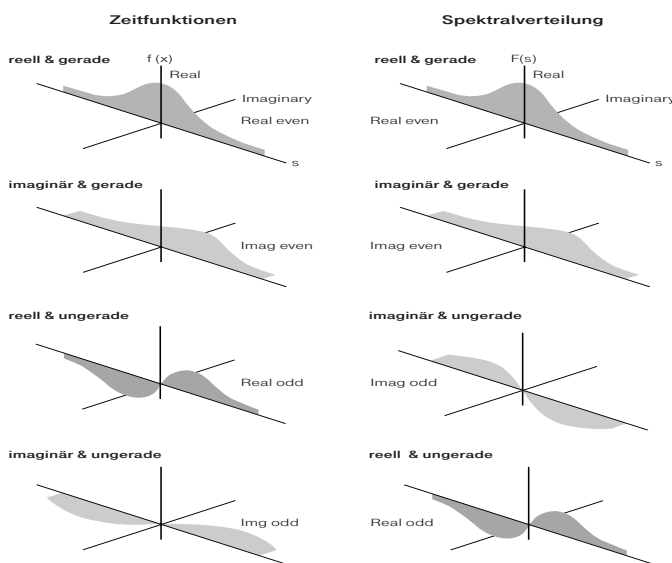


Bild 3.5: Symmetrien von Zeitfunktion und Spektraldichte

Die Symmetrien von I & Q sind in diesem Fall — bis auf die 90° Phasendrehung — identisch.

3.1.3 Phase und Laufzeit

Mit dem *Zeitverschiebungs-Satz* der Fourier-Transformation folgt:

$$u(t) \circ \bullet U(\omega) \rightsquigarrow u(t - t_0) \circ \bullet U(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} \tag{3.7}$$

Hierbei ist t_0 die Zeitverschiebung oder **Laufzeit** und

$$\omega t_0 = \Theta(\omega) = b(\omega) = -\Phi(\omega) \quad \text{linearer Phasengang} \quad (3.8)$$

die Phasendrehung oder **Phase**. Wie man aus Gleichung (3.8) erkennt, ist die **Phase** hier **linear** in ω , also proportional zur Frequenz, Bild 3.6. $\Theta(\omega) = b(\omega) = -\Phi(\omega)$ wird verwendet, weil zu einer negativen Phase eine positive (Signal-) Laufzeit gehört.

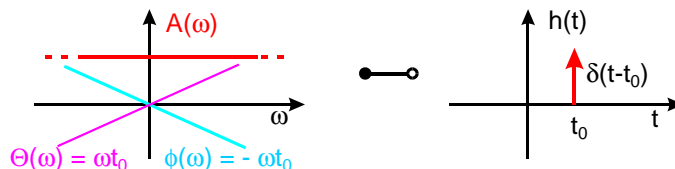


Bild 3.6: Ein verzerrungsfreies System hat einen linearen Phasengang $\Theta(\omega) = b(\omega) = \omega t_0$

Übertragungssysteme haben i.a. keine lineare (jedoch punktsymmetrische) Phase $\Theta(\omega) = b(\omega)$, siehe Bilder 3.1, 3.3 und 3.7.

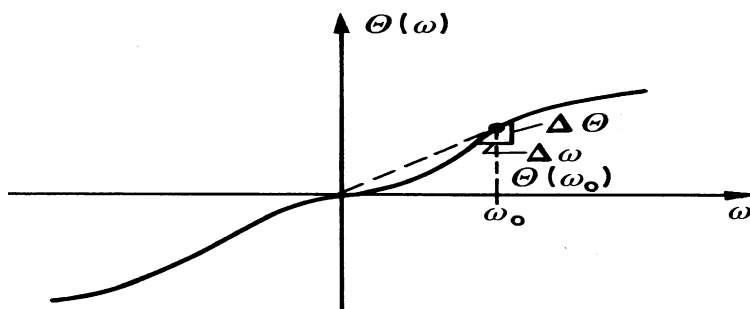


Bild 3.7: Definition von Phasen- und Gruppenlaufzeiten bei Systemen mit nichtlinearem Phasengang $\Theta(\omega)$

Man definiert bei Systemen mit nichtlinearer Phase die Signal-Laufzeiten in Anlehnung an Gleichung (3.8).

$$t_{\text{ph}}(\omega) = \frac{\Theta(\omega)}{\omega} = \frac{b(\omega)}{\omega} \quad \text{Phasenlaufzeit} \quad (3.9)$$

$$t_{\text{gr}}(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\Theta(\omega)}{\Delta\omega} = \frac{d\Theta(\omega)}{d\omega} = \frac{db(\omega)}{d\omega} \quad \text{Gruppenlaufzeit} \quad (3.10)$$

- Die **Phasenlaufzeit** $t_{\text{ph}}(\omega)$ ist die Zeit, die eine einzelne cosinus-förmige Schwingung beim Durchgang durch ein Übertragungssystem benötigt.
Wegen der Periodizität einer Cos-Schwingung kann t_{ph} nur als Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ zwischen Ein- und Ausgangssignal gemessen werden. Damit läßt sich t_{ph} nur modulo der Periodendauer T der cos-Schwingung bestimmen.
- Die **Gruppenlaufzeit** $t_{\text{gr}}(\omega)$ ist die Zeit, die eine „Gruppe“ von cos-förmigen Schwingungen beim Durchgang durch ein Übertragungssystem benötigt. Eine solche „Gruppe“ sind z.B. die Spektralkomponenten eines Datenimpulses oder die eines modulierten Signals.

3.1.4 Phasenverzerrung bei Basisband-Systemen

Basisband-Signale, z.B. digitale Signale, haben ein Leistungs-Dichte-Spektrum, das i.a. von sehr tiefen Frequenzen (im Grenzfall von $\omega = 0$) bis zu einer (systemtypischen) Grenzfrequenz reicht. Sollen die zu

übertragenden Digitalen Symbole in solchen Systemen keine (Phasen-) Verzerrung erleiden, muß die Phase des Systems linear sein. Daraus folgt die Bedingung:

$$t_{\text{ph}} = t_{\text{gr}} = t_0 = \text{const} \quad (3.11)$$

Wie stark sich eine Phasenverzerrung auf die Form des Ausgangs-Signals auswirkt, zeigt ein Beispiel bei dem ein Signal aus einer Grundschwingung (Frequenz ω_0 , Amplitude 1), einer Schwingung der dreifachen Frequenz ($3\omega_0$, Amplitude $1/3$) und der fünffachen Frequenz ($5\omega_0$, Amplitude $1/5$) besteht. Dieses Signal wird über einen Allpaß (LC-Kreuzglied) übertragen, wobei nur die Phasen der Schwingungen verdreht, die Amplituden dagegen nicht verändert werden, Bild 3.8. (Siehe auch Abschnitt 4.2 Minimalphasen-System.)

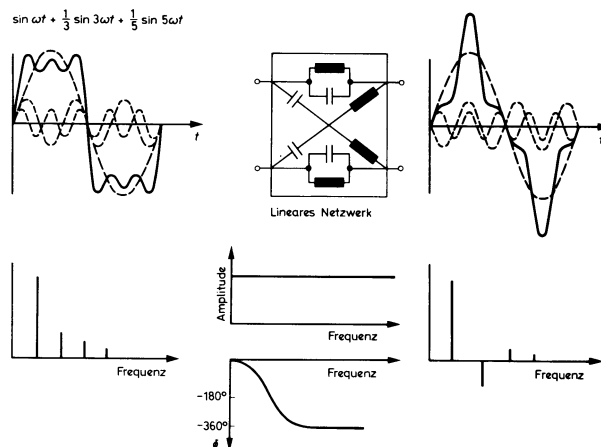


Bild 3.8: Auswirkung einer Phasenverschiebung eines Allpasses auf die Kurvenform der Zeitfunktion. Die Amplituden der Komponenten sind unverändert.

Dieses Beispiel zeigt deutlich, wie wichtig eine lineare Phase für eine unverzerrte Signalform am Ausgang eines Übertragungs-Systems ist. Die Verzerrung einer Impulsform wird auch mit **Dispersion** bezeichnet.

Da bei einer Phasenverzerrung keine neuen Spektralanteile entstehen, wird diese als **lineare Verzerrung** bezeichnet. Lineare Verzerrungen lassen sich (im Prinzip) immer ausgleichen.

Bei der Übertragung von Signalen wirken sich Laufzeitverzerrungen stärker aus (und damit verzerren der bezüglich des Zeitverlaufes) als Dämpfungsverzerrungen. Das ist der Grund dafür, weshalb man bestrebt ist, den Phasengang eines Übertragungs-Systems oder Filters möglichst linear zu machen.

Dies ist besonders wichtig bei der **Digitalen Übertragung**. Hierbei muß der Empfänger mit Hilfe von **Korrelation** (oder eines „Matched Filters“) feststellen, wie groß die Ähnlichkeit eines empfangenen Symbols (im Zeitbereich) zu den dem Empfänger bekannten Symbolen ist und daraus eine Entscheidung treffen. Linear verzerrte Empfangs-Symbole verlieren jedoch (in Abhängigkeit von dem Maß der Verzerrung) zunehmend an Ähnlichkeit. Dadurch kommt es im Empfänger zu Fehlentscheidungen und damit zu **Symbol- und Bit-Fehlern**.

3.1.5 Phasenverzerrungen bei Bandpaß-Systemen

Modulationen bestehen spektral aus Frequenz-Gruppen. Eine **verzerrungsfreie Übertragung** eines **modulierten Signals** erfordert daher **mindestens** eine **konstante Gruppenlaufzeit**. Die **Gruppenlaufzeit** wirkt sich dabei auf die **Form der Hüllkurve der modulierten Schwingung** aus.

Amplituden modulierte Signale

Ein Beispiel zur Auswirkung von Phasen- und Gruppenlaufzeit auf den Zeitverlauf zeigt Bild 3.9. In diesem Beispiel ist die Gruppenlaufzeit konstant (innerhalb der Bandbreite der Modulation), aber unterschiedlich zur Phasenlaufzeit, $t_{\text{ph}} \neq t_{\text{gr}}$. Die Trägerschwingung füllt daher die Hüllkurve des zeitverschobenen Signals anders aus als im ursprünglichen Signal. Da die Gruppenlaufzeit t_{gr} konstant ist, hat sich die **Form der Hüllkurve** nicht verändert. Für Systeme die **Amplituden-modulierte Signale** übertragen (bei denen die

Information nur in der Hüllkurve steckt), genügt es daher, wenn die Gruppenlaufzeit im Übertragungsband konstant ist ($t_{gr} = \text{const}$).

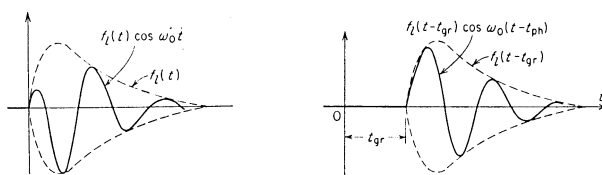


Bild 3.9: Auswirkung von Phasen- und Gruppenlaufzeit im Zeitbereich, wobei t_{gr} konstant ist. Bei konstanter Gruppenlaufzeit $t_{gr} = \text{const}$ bleibt die Form der Hüllkurve eines modulierten Signals unverzerrt. Jedoch ist der Verlauf der Zeitfunktion unterschiedlich, weil $t_{ph} \neq t_{gr}$ ist.

Ist hingegen die Phase nicht linear und demzufolge die Gruppen-Laufzeit nicht konstant, wie im Beispiel Bild 3.10, ergeben sich Verzerrungen der Hüllkurve, Bild 3.11. In einem solchen Fall kann selbst eine (asynchrone) Hüllkurven-Demodulation nicht für eine Datenübertragung genutzt werden.

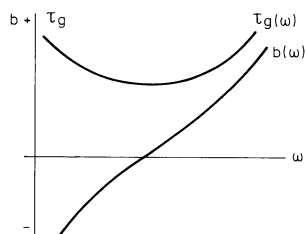


Bild 3.10: Nicht lineare Phase und nicht konstante Gruppenlaufzeit (Gruppenlaufzeitverzerrung)

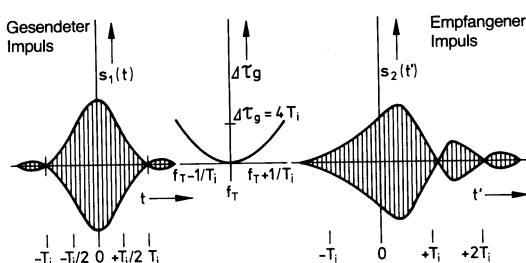


Bild 3.11: Verzerrung der Hüllkurve eines modulierten Daten-Symbols infolge von Gruppenlaufzeitverzerrung

Frequenz modulierte Signale und Digitale Modulationen

Ist zwar die Gruppenlaufzeit konstant, jedoch im Wert verschieden von der Phasenlaufzeit eines Übertragungs-Systems ($t_{gr} \neq t_{ph}$), bleibt zwar die Form der Hüllkurve unverändert, jedoch ist der tatsächliche Zeitverlauf des (modulierten) Signals am Ausgang des Systems verändert gegenüber der Form des Eingangssignals, Bild 3.9.

Liegt die übertragene Information nicht in der Hüllkurve, sondern im tatsächlichen Zeitverlauf, wie z.B. bei **Digitalen Modulationen** oder bei **Frequenzmodulation (FM)**, ergeben sich in diesem Fall lineare Verzerrungen, die sich (nach der Decodierung bzw. Demodulation) als **Bitfehler** bzw. als **nichtlineare Verzerrungen** bemerkbar machen.

Damit diese Verzerrungen vermieden werden, muß das Übertragungs-System (zusätzlich) frei von Phasenverzerrungen sein. Es muß also gelten:

$$t_{ph} = t_{gr} = \text{const} \quad (3.12)$$

Die hierzu notwendige Bedingung läßt sich sofort graphisch angeben, Bild 3.12 .

Die Phasen-Laufzeit t_{ph} kann immer nur modulo 2π bestimmt werden. Hat also das Übertragungs-System (Bandpaß-System) in seinem Durchlaß-Bereich eine konstante Gruppenlaufzeit t_{gr} , so muß die Verlängerung der Phasenkurve entweder durch den Koordinaten-Ursprung gehen, oder aber die Θ -Achse bei ganzen Vielfachen von 2π schneiden.

Fordert man, daß sich die Spektralkomponenten des Datensymbols **am Ausgang des Systems** in der gleichen Art und Weise wie am Eingang zusammensetzen, damit es keine **Verzerrungen** (in Form von Dispersion oder Echos) erleidet, benötigt das Übertragungs-System eine **konstante Gruppenlaufzeit** $t_{gr}(\omega) =$

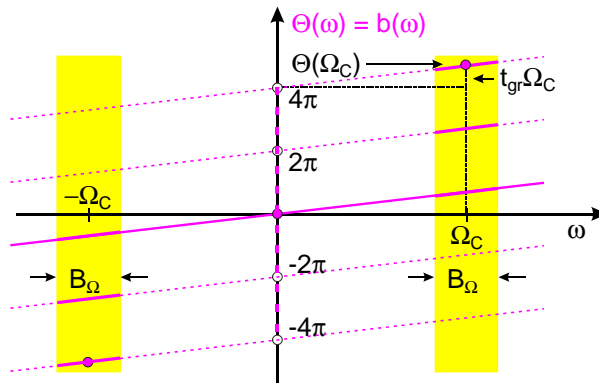


Bild 3.12: Ein Bandpaß-System ist frei von Phasenverzerrungen, wenn die extrapolierten Phasenverläufe die Θ -Achse bei $n2\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) schneiden. B_Ω ist die Bandbreite des Systems.

const und eine **konstante Phasenlaufzeit** t_{ph} , die modulo 2π den gleichen Wert hat wie die Gruppenlaufzeit t_{gr} .

3.1.6 Phasen-Messung

Eine Phase kann immer nur in Bezug auf eine Referenz-Phase angegeben (und gemessen) werden. Die Referenz ist entweder ein Achsenkreuz (theoretisch) oder eine Vergleichs-Funktion. Meßtechnisch gibt es verschiedene Prinzipien, die in Bild 3.13 zusammengefaßt sind.

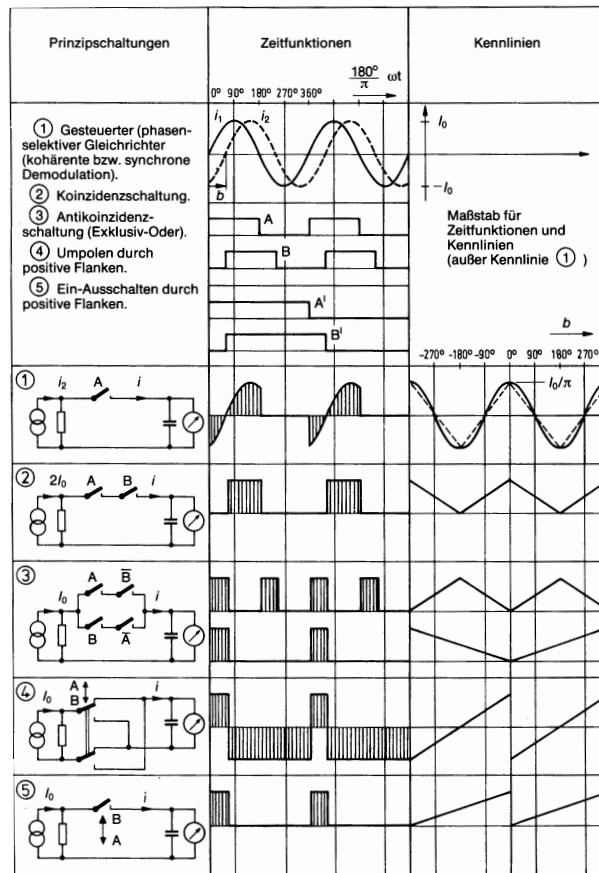


Bild 3.13: Prinzipien der Phasen-Messung

3.1.7 Phasenschwankungen unterschiedlicher Periodendauer

Da die Gruppenlaufzeit aus der Ableitung der Phase nach der Frequenz erfolgt, Gleichung (3.10), resultiert daraus, daß Phasenschwankungen (mit gleicher Amplitude) sich stärker auf Schwankungen der Gruppenlaufzeit auswirken, wenn die Phasen-Rippel enger sind, Bild 3.14.

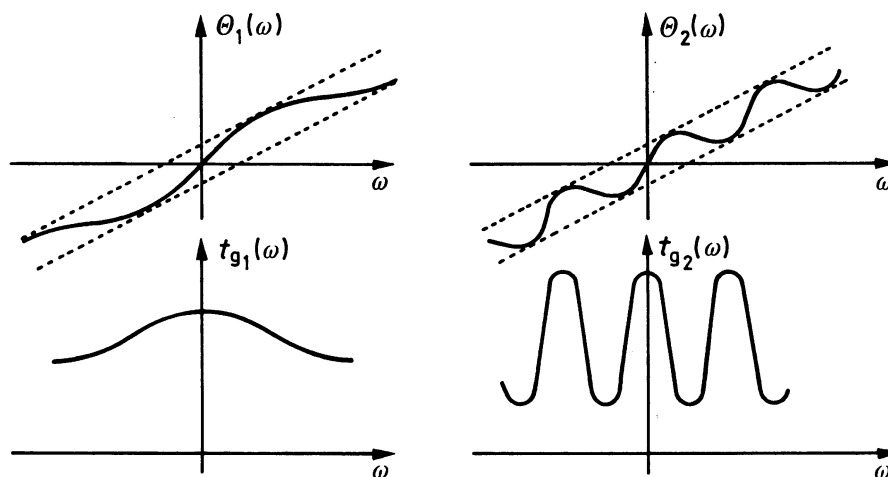


Bild 3.14: Bei gleicher Amplitude wirken sich Phasenschwankungen stärker als Schwankungen der Gruppenlaufzeit aus, wenn die Phasen-Rippel enger sind.

3.1.8 Messung der Gruppenlaufzeit

Moderne Meßgeräte können aus zwei Phasenmessungen bei benachbarten Frequenzen (Näherungswerte für) die Gruppenlaufzeit (direkt) berechnen.

Das Grundprinzip für eine Messung der Gruppenlaufzeit geht auf Nyquist zurück und mißt die (zeitliche) Verschiebung der Hüllkurve eines amplitudenmodulierten Signals, entsprechend zu Bild 3.9. Die Meßgenauigkeit ist dabei abhängig von der Frequenz des modulierenden Signals, die in diesem Zusammenhang Spalt-Frequenz ω_s genannt wird, Bild 3.15.

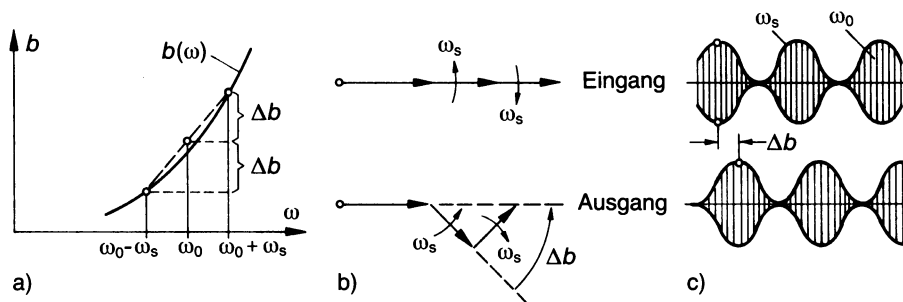


Bild 3.15: Messung der Gruppenlaufzeit nach Nyquist (Schleifen-Messung)

Bei einer **Schleifen-Messung** steht das Eingangs- und das Ausgangs-Signal zur Verfügung, die man zur Messung einer Phasenverschiebung benötigt.

Bei einer **Strecken-Messung** ist jedoch der Signalgenerator am Ort A und die Messung wird am Ort B durchgeführt, weil die Eigenschaft der Übertragungsstrecke zwischen A und B ermittelt werden soll. In diesem Fall muß das Meß-Signal so beschaffen sein, daß daraus die zur Messung (einer Phase) notwendige Referenz gewonnen werden kann. Diese gewinnt man dadurch, daß periodisch zwischen zwei Werten f für die Trägerfrequenz hin und her geschaltet wird (Meß-Frequenz und Vergleichs-Frequenz), Bild 3.16.

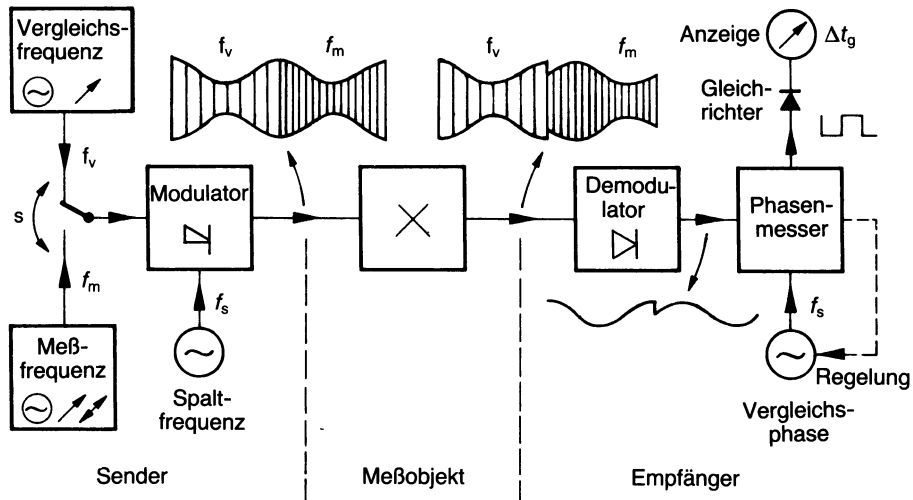


Bild 3.16: Messung der Gruppenlaufzeit nach Nyquist (Strecken-Messung)

Ist die Phase nicht linear, ergibt sich bei unterschiedlichen Trägerfrequenzen eine unterschiedliche Steigung und damit eine Unstetigkeits-Stelle in der Hüllkurve, was einem Phasen-Sprung entspricht.

Die Größe der Verstärkung (bzw. Dämpfung) kann bei dem Nyquist-Verfahren ebenfalls gemessen werden, Bild 3.17.

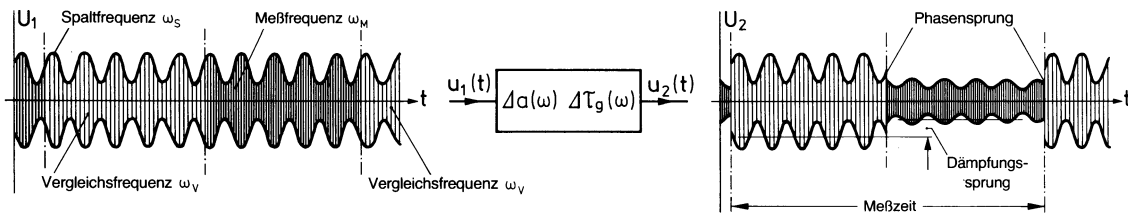


Bild 3.17: Messung der Gruppenlaufzeit und der Dämpfung nach Nyquist

3.2 Impulsantwort aus Betrag und Phase der Übertragungsfunktion

Die Impulsantwort $h(t)$ ist die Fourier-Transformierte der Übertragungsfunktion $H(\omega)$.

$$h(t) \iff H(\omega) = A(\omega) \cdot e^{-j\Theta(\omega)} \tag{3.13}$$

Gleichung (3.13) wird als Fourier-Transformation geschrieben und der $e^{j\dots}$ -Faktor gemäß Euler aufgespalten. Damit wird:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cdot e^{j(\omega t - \Theta(\omega))} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{A(\omega)}_{\text{gerade}} \cdot \left\{ \underbrace{\cos\{\omega t - \Theta(\omega)\}}_{\text{gerade}} + j \underbrace{\sin\{\omega t - \Theta(\omega)\}}_{\text{ungerade}} \right\} d\omega \tag{3.14}$$

Da die Integration eines ungeraden Integranden über symmetrische Integralgrenzen Null ergibt, reduziert sich das Integral in Gleichung (3.14):

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cdot \cos\{\omega t - \Theta(\omega)\} d\omega \tag{3.15}$$

3.2.1 Die Impulsantwort eines linearphasigen Systems

Aus den Symmetrie-Eigenschaften der Übertragungsfunktion Gleichungen (3.1) und (3.1) folgt für eine reell gerade (spiegel-symmetrische) Impulsantwort:

$$\underbrace{h(t)}_{\text{reell, gerade}} \quad \longleftrightarrow \quad \underbrace{H(\omega)}_{\text{reell, gerade}} \quad (3.16)$$

Hierbei ist die Phasendrehung und damit die Laufzeit zunächst außer Acht gelassen (bzw. zu Null gesetzt).

Eine lineare Phase ergibt dann nur noch eine Zeitverschiebung der Impulsantwort. Für ein linearphasiges System gilt gemäß Gleichung (3.8):

$$\Theta(\omega) = \omega \cdot t_0 \quad : \text{Phase ist linear in } \omega \quad (3.17)$$

Setzt man die Bedingung Gleichung (3.17) in Gleichung (3.15) ein, so wird:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cdot \cos\{\omega(t - t_0)\} d\omega \quad (3.18)$$

Das Maximum von $h(t)$ ergibt sich für $t = t_0$:

$$h_{\max} = h(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) d\omega \quad (3.19)$$

h_{\max} ist somit gleich der Fläche unter der Durchlaßkurve $A(\omega)$ des Übertragungssystems.¹

Weil der Cosinus eine gerade Funktion ist, gilt für eine Abweichung um Δt rechts bzw. links von Maximum:

$$h(t_0 - \Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cos(-\Delta t) d\omega = h(t_0 + \Delta t) \quad (3.20)$$

- Die Impulsantwort eines linearphasigen Systems ist demnach eine gerade Funktion bezüglich der Laufzeit t_0 .

$$h(t_0 - t) = h(t_0 + t) \quad (3.21)$$

Das Maximum von $h(t)$ bei $t = t_0$ ist ein **absolutes Maximum**, denn es gilt:

$$\begin{aligned} h(t_0 + \Delta t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cos(\omega \Delta t) d\omega \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) |\cos(\omega \Delta t)| d\omega \\ h(t_0 + \Delta t) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) d\omega = h(t_0) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Bild 3.18 zeigt die Impuls- und Sprungantwort eines linearphasigen Systems.

- Die **Impulsantwort** hat eine **Spiegelsymmetrie** bezüglich $t = t_0$.
- Die **Sprungantwort** hat eine **Punktsymmetrie** bezüglich des Punktes $\left\{ t_0; \frac{a(\infty)}{2} \right\}$.

Zusätzlich sind in dieser Abbildung eingetragen: **mittlere Grenzfrequenz** ω_m des Tiefpasses, **mittlere Breite** t_r der Impulsantwort und (minimale) **Anstiegszeit** t_r der Sprungantwort ($t_r = \pi/\omega_m$).²

¹Dies kann als eine Verallgemeinerung des Satzes über die Zentralordinate aufgefaßt werden.

²Der Zusammenhang ($t_r = \pi/\omega_m$) wird im Kapitel „Tiefpaß-Systeme“ hergeleitet.

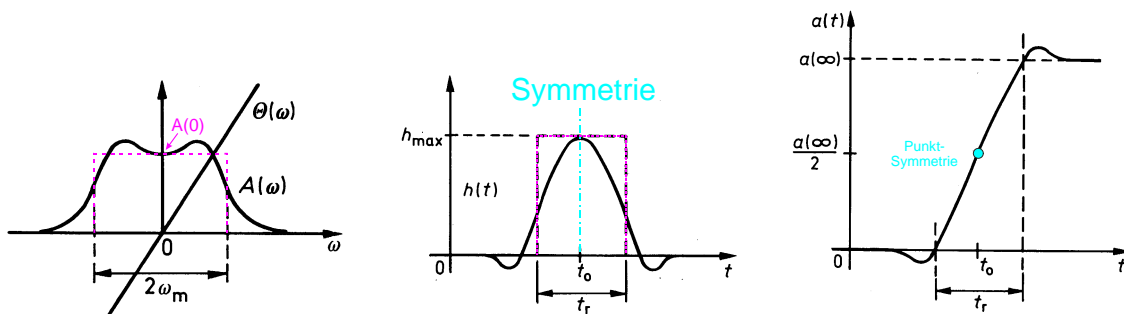


Bild 3.18: Tiefpaß mit linearer Phase: Impulsantwort (gerade bezüglich $t = t_0$); Sprungantwort (ungerade bezüglich $t = t_0, a(\infty)/2$). t_r = mittlere Breite der Impulsantwort = Anstiegszeit der Sprungantwort.

3.2.2 Linearphasige Filter in der Digitalen Signalverarbeitung

Bei der Digitalen Signalverarbeitung werden im Falle der **FIR-Filter** (FIR: *Finite Impulse Response*) Stützwerte in Form der Impulsantwort $h(t)$ einprogrammiert, wodurch hier die Form der Übertragungsfunktion festgelegt wird, Bild 3.19.

- Eine gerade Impulsantwort $h(t)$ bezüglich ihres Maximums $h(t_0)$ ist zur Erzeugung eines linearphasigen Filters notwendig und hinreichend.

FIR-Filter sind rechenaufwendig und benötigen bei gegebener Flankensteilheit mehr Koeffizienten als IIR-Filter (IIR: *Infinite Impulse Response*). **IIR-Filter** sind rückgekoppelte Strukturen, die nur in Spezialfällen linearphasige Filter ergeben, Bild 3.20. Diese sind nur dann gegeben, wenn eine IIR-Struktur (ausnahmsweise) eine symmetrische (und damit endliche) Impulsantwort hat.

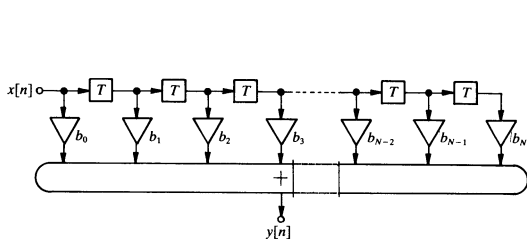


Bild 3.19: Blockschaltbild eines FIR-Filters: lineare Phase möglich

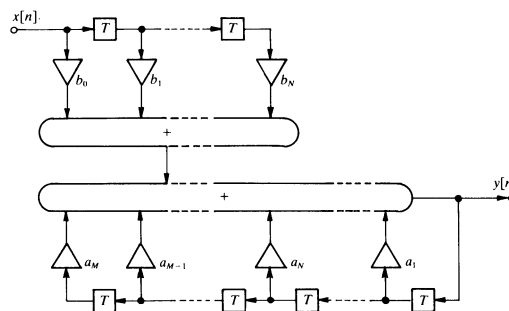


Bild 3.20: Blockschaltbild eines IIR-Filters: i.a. keine lineare Phase möglich

3.3 Sprungantwort aus Betrag und Phase der Übertragungsfunktion

Mit dem Zeit-Integrations-Satz der F-Transformation gilt für die Sprungantwort $a(t)$:

$$a(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{j\omega} H(\omega) + \pi \delta(\omega) H(0) \tag{3.23}$$

Die Eingangsspannung ist hierbei die Sprungfunktion (eingeschaltete Gleichspannung), welche zur Vereinfachung der Schreibweise auf 1V normiert wird:

$$u_e(t)/\hat{U} = \sigma(t) \quad \circ \bullet \quad \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} = U_e(\omega)/\hat{U} \tag{3.24}$$

Mit Gleichung (3.23) folgt direkt:

$$U_a(\omega)/\hat{U} = A(\omega) \cdot e^{-j\Theta(\omega)} \{\pi\delta(\omega) + 1/j\omega\} = \pi A(0) \cdot \delta(\omega) + \frac{A(\omega)}{j\omega} \cdot e^{-j\Theta(\omega)} \quad (3.25)$$

Gleichung (3.25) wird rücktransformiert und liefert die Sprungantwort:

$$u_a(t)/\hat{U} = a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \pi A(0)\delta(\omega) + \frac{A(\omega)}{j\omega} \cdot e^{-j\Theta(\omega)} \right\} \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (3.26)$$

Mit der Ausblendeigenschaft der δ -Funktion wird:

$$a(t) = \frac{A(0)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{A(\omega)}{j\omega}}_{\text{ungerade}} \left\{ \underbrace{\cos\{\omega t - \Theta(\omega)\}}_{\text{gerade}} + \underbrace{j \sin\{\omega t - \Theta(\omega)\}}_{\text{ungerade}} \right\} d\omega \quad (3.27)$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrien des Integranden (*odd · odd = even*), bleibt schließlich für die Sprungantwort übrig:³

$$a(t) = \frac{A(0)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega)}{\omega} \cdot \sin\{\omega t - \Theta(\omega)\} d\omega \quad (3.28)$$

3.3.1 Die Sprungantwort eines linearphasigen Systems

Setzt man in Gleichung (3.28) eine lineare Phase $\Theta(\omega) = \omega t_0$ ein, so wird die Sprungantwort:

$$a(t) = \frac{A(0)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega) \sin\{\omega(t - t_0)\}}{\omega} d\omega \quad (3.29)$$

Hieraus folgt sofort

$$a(t_0) = A(0)/2 = a(\infty)/2 \quad \text{Symmetriepunkt} \quad (3.30)$$

da mit Gleichung (2.6) (Seite 5)

$$a(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau = H(0) = A(0) \quad (3.31)$$

gilt, und die Phase $\Theta(\omega)$ ungerade ist, also $\Theta(0) = 0$. Die Sprungantwort eines *linearphasigen* Tiefpaß-Systems hat also zum Zeitpunkt $t = t_0$ den Wert $a(t_0) = a(\infty)/2$ erreicht.

Die Beziehung

$$a(\infty) = H(0) = A(0) \quad \text{Endwert-Theorem} \quad (3.32)$$

ist das **Endwert-Theorem der Fourier-Transformation**.

Während die Impulsantwort eines linearphasigen Systems spiegelsymmetrisch (gerade) bezüglich des Punktes t_0 ist, hat die **Sprungantwort eines linearphasigen Systems eine Punktsymmetrie bezüglich des Punktes** $\{t_0; a(\infty)/2\}$, weil die Integration über eine spiegelsymmetrische Funktion auf eine Punktsymmetrie führt, vergleiche hierzu Bild 3.18 (Seite 16).

$$a(t) = \int_{-\infty}^t \underbrace{h(\tau)}_{\text{gerade}} \cdot d\tau \quad \text{Symmetrien des linearphasigen TP-Systems bezüglich } t = t_0 \quad (3.33)$$

ungerade

³Wendet man Gleichung (2.6) direkt an, erhält man nur das Integral in Gleichung (3.28), jedoch nicht den Term $A(0)/2$. Hier zeigt es sich, daß Berechnungen, in denen die δ -Funktion „versteckt“ auftritt, leicht falsch werden können!

3.4 Das verzerrungsfreie System

Man fordert für ein verzerrungsfreies System, daß die Ausgangsspannung $u_a(t)$ ein genaues Abbild der Eingangsspannung $u_e(t)$ sein soll, Bild 3.21.

$$u_a(t) = K \cdot u_e(t - t_0) \quad K : \text{Verstärkung, } t_0 : \text{Laufzeit} \quad (3.34)$$

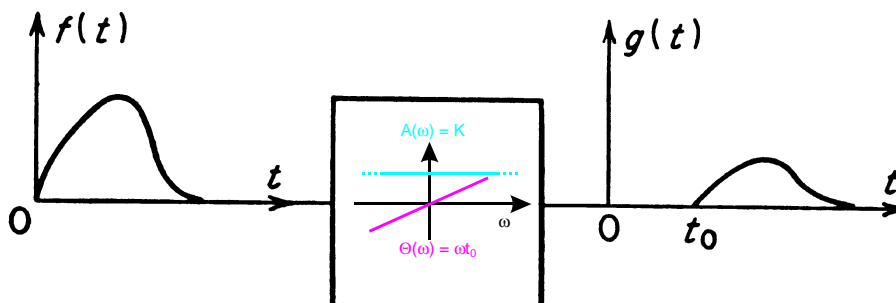


Bild 3.21: Bei einem verzerrungsfreien System ist die Ausgangsspannung ähnlich zur Eingangsspannung.

Da Gleichung (3.34) für beliebige Eingangsspannungen gilt, also auch für δ -Impulse, erhält man für die Impulsantwort $h(t)$:

$$h(t) = K \cdot \delta(t - t_0) \quad (3.35)$$

Somit wird die Übertragungsfunktion des verzerrungsfreien Systems:

$$H(\omega) = K \cdot e^{-j\omega t_0} = A(\omega) \cdot e^{-j\Theta(\omega)} \quad (3.36)$$

Das verzerrungsfreie System kann als Spezialfall eines linearphasigen Systems angesehen werden. Es hat nicht nur eine **lineare Phase**, sondern zusätzlich einen **konstanten Amplitudengang**, Bild 3.22.

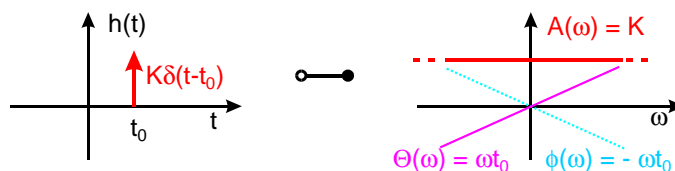


Bild 3.22: Ein verzerrungsfreies System hat einen linearen Phasengang $\Theta(\omega) = b(\omega) = \omega t_0$ und einen konstanten Amplitudengang $A(\omega) = K$

Also gilt für ein verzerrungsfreies System, Bild 3.22:

- $A(\omega) = K = \text{constant}$
- $\Theta(\omega) = \omega t_0$: linear in ω

Für ein Übertragungs-System mit endlicher Bandbreite ist ein *linearer Phasengang* und damit eine *konstante Laufzeit* die entscheidende Forderung in Bezug auf eine möglichst weitestgehende Verzerrungsfreiheit der Übertragung. Dies spielt insbesondere bei der Datenübertragung eine Rolle.

4 Kausalitätsbedingungen

Gibt man die Eigenschaften eines Systems, z.B. **Betrag und Phase** seiner Übertragungsfunktion, **unabhängig von einander** vor, so erhält man i.a. **nicht kausale Systeme**. **Realisierbare Systeme** müssen aber **kausal** sein.

Ein kausales System ist nicht in jedem Fall realisierbar, weil hierfür noch die physikalischen Eigenschaften der Bauelemente (analog: R, L, C bzw. digitales System) berücksichtigt werden müssen. Kausalität ist eine notwendige, jedoch nicht hinreichende Bedingung für die Realisierbarkeit eines Systems.

In diesem Abschnitt sollen die Bedingungen untersucht werden, die ein kausales Übertragungs-System erfüllen muß.

Eine Übertragungsfunktion $H(\omega)$ kann auf verschiedene Art angegeben werden:

$$H(\omega) = A(\omega) \cdot e^{-j\Theta(\omega)} \quad \text{Betrag und Phase: polare Darstellung} \quad (4.1)$$

$$H(\omega) = e^{-a(\omega)} \cdot e^{-j\Theta(\omega)} \quad \text{Dämpfung und Phase} \quad (4.2)$$

$$H(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad \text{Real- und Imaginäranteil: kartesische Darstellung} \quad (4.3)$$

Wenn eine dieser Größen vorgegeben wird, muß *die jeweilige andere so bestimmt* werden, daß das System *kausal* wird. Die Untersuchung dieser Bedingungen führt auf wichtige technische Anwendungen.

4.1 Fensterung und Sperrbedingung

4.1.1 Lineare Phase vorgegeben, Amplitudengang gesucht

Diese Bedingung läßt sich immer erfüllen. Hat man zunächst ein nicht kausales System $H(\omega)$, z.B. einen idealen Tiefpaß, Bild 4.1, so kann man die nicht kausale Impulsantwort für $t < 0$ dadurch zu 0 machen, daß man die Impulsantwort $h(t)$ mit einer **Fensterfunktion** $w(t)$ multipliziert. Die Fensterbreite muß dabei so gewählt werden, daß die gefensterte Impulsantwort die für den linearen Phasenverlauf der ÜTF notwendige Symmetrie erhält. Die vorgegebene Übertragungsfunktion (ÜTF) $H(\omega)$ ist dann mit der Transformierten $W(\omega)$ zu falten. In der *Digitalen Signalverarbeitung* wird bei FIR-Systemen von der Fensterung ausführlich Gebrauch gemacht.

$$H_{\text{kausal}}(\omega) = H(\omega) * W(\omega) \quad (4.4)$$

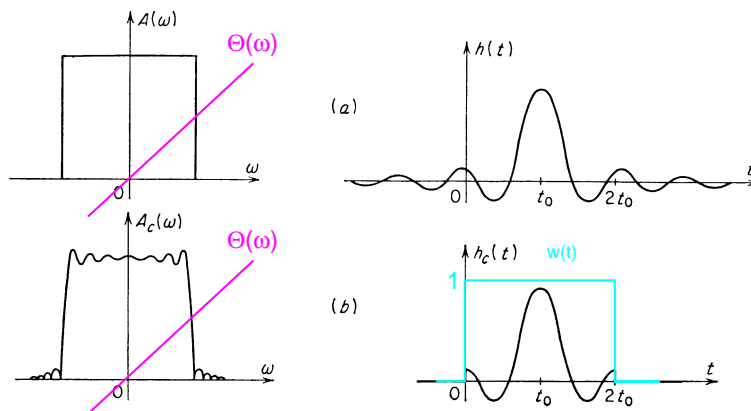


Bild 4.1: Beispiel für die Fensterung mit einem Rechteckfenster $p_{t_0}(t - t_0)$

Wie man aus Bild 4.1 sieht, führt die Fensterung mit einem Rechteckfenster zu keinem günstigen Verlauf des Amplitudengangs. In der Praxis verwendet man daher verrundete Fenster, z.B. \cos^2 -Fenster,¹ damit der Amplitudengang $A_{\text{kausal}}(\omega)$ glatter wird und speziell im Sperrbereich nicht so viel durchgelassen wird, d.h. die Sperrdämpfung ausreichend groß wird.

¹Das \cos^2 -Fenster wird auch mit „von Hann“ oder Hanning bezeichnet. In der Digitalen Signalverarbeitung sind noch eine Reihe anderer Fensterfunktionen üblich, wie z.B. Hamming-Fenster, Blackman-Fenster, Kaiser-Fenster, Chebwin-Fenster. Siehe auch Kapitel 5 der „Fourier-Transformation und ihre Anwendungen“.

4.1.2 Amplitudengang vorgegeben, Phase gesucht

Die Vorgabe des Amplitudengangs $A(\omega)$ führt nur dann zu einem kausalen System, wenn $A(\omega)$ der *Paley-Wiener-Bedingung* genügt.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln A(\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty \quad \text{Paley-Wiener-Bedingung} \quad (4.5)$$

Aus Gleichung (4.5) folgt, daß

$$A(\omega) \neq 0 \quad \text{für} \quad \omega > \omega_c \quad (4.6)$$

sein muß. Die Konsequenz daraus ist aber, daß es kein realisierbares System geben kann, das im Sperrbereich ∞ gut sperrt!

In der Praxis sind Sperrdämpfungen von 80 bis 100 dB gut realisierbar, wenn man z.B. eine durchgehende Massefläche benutzt und die Versorgungsspannungen gut verblockt. Bei geforderten Sperrdämpfungen von 120 dB und mehr ist eine aufwendige Schirmung unerlässlich. Beispiele dazu finden sich in der Hochfrequenz-Technik.

Die für einen idealen Tiefpaß notwendigen Modifikationen zeigt Bild 4.2. Der Phasengang ist nicht mehr linear und weist bei der Grenzfrequenz ω_c eine Polstelle ($\Theta(\omega) \rightarrow \infty$) auf, wodurch hier die Gruppenlaufzeit $t_{gr}(\omega) \rightarrow \infty$ geht.

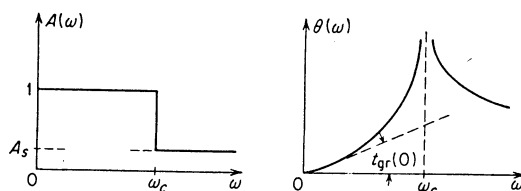


Bild 4.2: Kausales System mit rechteckförmiger Durchlaßkurve

4.2 Minimalphasen-System

Gibt man den Dämpfungsverlauf $a(\omega) = 20 \log A(\omega)$ oder den Amplitudengang $A(\omega)$ vor, so gibt es dazu keinen eindeutigen Zusammenhang mit dem Phasenverlauf $\Theta(\omega)$. Der Grund dafür liegt darin, daß es **Allpaß-Systeme** gibt, die zwar keine Änderung des Amplitudengangs bewirken, jedoch eine zusätzliche Phasendrehung erbringen. Um einen eindeutigen Phasenverlauf zu erhalten, muß man noch wissen, welche Art von Allpässen ggf. in dem System stecken.

Liegt der Dämpfungsverlauf $a(\omega)$ meßtechnisch vor, hat man daraus noch keine Information über eventuelle Allpaß-Anteile eines Systems. Diese kommen in der Praxis aber recht häufig vor, wie z.B. bei akustischen Wandlern (z.B. bei Lautsprechern). Hierdurch ergibt sich ein völlig unterschiedlicher Klang, obwohl sich die Amplitudengänge nicht wesentlich unterscheiden.

Enthält ein System Allpaß-Anteile, so ändert sich dadurch seine Impulsantwort, verglichen mit einem Allpaß-freien (**minimalphasigen**) System mit gleichem Amplitudengang. Da für die Ausgangsgröße $x_a(t) = x_e(t) * h(t)$ gilt, ist demzufolge auch die Ausgangsgröße unterschiedlich.

4.2.1 Allpaß-Systeme und Laufzeit-Entzerrer

Ein verzerrungsfreies System kann als eine spezielle Form eines Allpasses angesehen werden, welcher dadurch definiert ist, daß er einen *konstanten Amplitudengang* $A(\omega) = const.$ hat bei beliebigem — jedoch ungeradem — Phasengang $\Theta(\omega)$, Bild 4.3.

Allpässe werden in der Technik verwendet, um Phasenverläufe von (analogen) Filtern zu linearisieren, und damit die Laufzeiten der Filter zu ebnen. Allpässe verändern nicht die Durchlaßkurve dieser Filter, da sie einen konstanten Amplitudengang haben. Technisch spricht man von **Laufzeit-Entzerrern** oder **Equalizern**. In analoger Technik werden Allpässe z.B. mit gekoppelten LC-Netzwerken (Bild 3.8 (Seite 10))

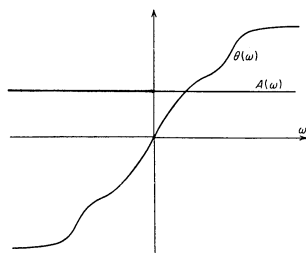


Bild 4.3: Beispiel einer Übertragungsfunktion eines Allpasses

oder überbrückten T-Gliedern realisiert. Da in analoger Technik keine exakt symmetrische Impulsantwort realisierbar ist, lassen sich daher auch keine exakt linearen Phasen (und damit konstante Gruppenlaufzeiten) erzielen.

Ein wichtiges Einsatzgebiet ist heutzutage die (softwaremäßige) Entzerrung der empfangenen Datensymbole bei einer Digitalen Übertragung.

4.3 Hilbert-Transformation

Die Übertragungsfunktion nach **Real- oder Imaginärteil** vorzugeben geht in jedem Fall, weil sich der gesuchte Teil jeweils über die **Hilbert-Transformation** berechnen läßt.²

Da die Impulsantwort $h(t)$ eine **reelle Zeitfunktion** ist, kann man sie gemäß Bild 4.4 in ihren geraden und ungeraden Teil aufspalten.

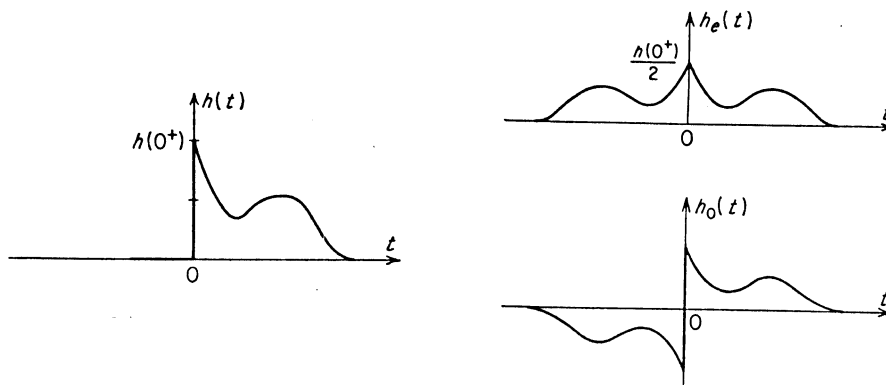


Bild 4.4: Aufspalten einer kausalen Impulsantwort in ihren geraden und ungeraden Teil

Der gerade Teil $h_e(t)$ und der ungerade Teil $h_o(t)$ der Impulsantwort $h(t)$ können durch die **Signum-Funktion** sgnt in einander überführt werden:

$$h_o(t) = h_e(t) \cdot \text{sgnt} \quad (4.7)$$

$$h_e(t) = h_o(t) \cdot \text{sgnt} \quad (4.8)$$

Mit den Symmetrie-Eigenschaften der Fourier-Transformation

$$h_o(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad jH_o(\omega) = jX(\omega) \quad (4.9)$$

$$h_e(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad H_e(\omega) = R(\omega) \quad (4.10)$$

folgen nun mit Gleichung (4.7, 4.8) die **Hilbert-Transformationen**,³

²Meßtechnisch sind allerdings nur Betrag und Phase oder Dämpfung und Laufzeit erfassbar.

³Der Term $R(\infty)$ in Gleichung (4.13) tritt nur dann auf, wenn die Impulsantwort $h(t)$ für $t = 0$ einen δ -Impuls enthält.

$$jX(\omega) = R(\omega) * \frac{2}{j\omega} \tag{4.11}$$

$$X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\nu)}{\omega - \nu} d\nu \tag{4.12}$$

$$R(\omega) = R(\infty) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\omega)}{\omega - \nu} d\nu \tag{4.13}$$

Die (technische) Bedeutung der Hilbert-Transformation ergibt sich aus

- der Verarbeitung von Bandpaß-Signale im Basisband bei der Digitalen Signalverarbeitung ⁴
- deren Anwendung für 90⁰-Netzwerke, die z.B. bei der Erzeugung von *Einseitenbandmodulation* (SSB) nach der *Phasenmethode* Verwendung finden, siehe Bild 4.5 ⁵. Die hier dargestellten Impulsantworten müssen noch gefenstert und Zeit-verschoben werden, damit die Kausalitätsbedingungen erfüllt sind.

Das Problem der Realisierung eines Hilbert-Transformators liegt nicht bei der 90⁰-Drehung einer *einzelnen* Cos-Schwingung, denn das ist ohne Problem mit Hilfe einfacher Netzwerke möglich. Für die Anwendung z.B. in einem SSB-Modulator benötigt man die 90⁰-Drehung eines *ganzen Nachrichten-Bandes*, also z.B. von 300 Hz bis 3.4 KHz für Telefonie. Die Realisierung dazu geschieht mit Hilfe digitaler FIR-Filter, indem in ein solches Filter die entsprechende Impulsantwort $h_H(t)$ einprogrammiert wird, die aufgrund der Symmetriebedingungen der Fouriertransformation ungerade sein muß.

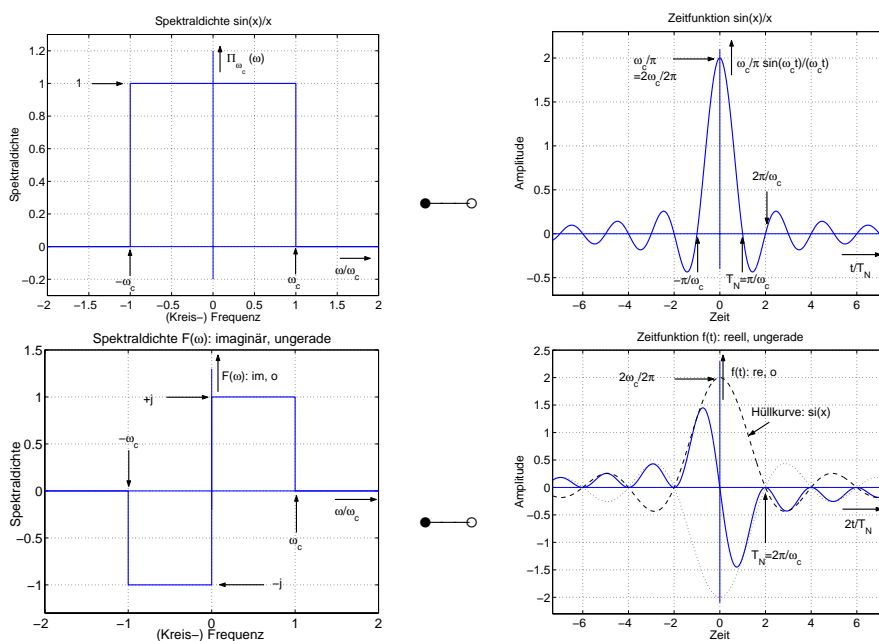


Bild 4.5: Beispiel für die Hilbert-Transformation im Frequenzbereich mit den zugehörigen Impulsantworten

Die Impuls-Antwort des Hilbert-Filter, Bild 4.5 rechts unten, ist ungerade und damit punktsymmetrisch (bezüglich der Laufzeit t_0). Dies ist die Bedingung dafür, daß die 90⁰ Phasendrehung exakt eingehalten wird. Wie auch im Falle des linearphasigen Filters kann nur die digitale Realisierung diese Bedingung erfüllen.

⁴Siehe „Die Fourier-Transformation und ihre Anwendungen“, Abschnitt „Bandpaß-Signale und äquivalente Tiefpaß-Signale“
⁵Siehe auch „Einseitenband- und Restseitenband-Modulation“ Abschnitt 2.3 „Phasen-Methode“

5 Fast lineare Übertragungs-Systeme

Linearität ist in der Praxis immer nur **näherungsweise innerhalb des Aussteuerungsbereichs** erfüllt. Betragen die Abweichungen vom linearen Verhalten nur wenige Promille oder Prozente, lassen sich die Auswirkungen davon mit Hilfe von *Klirrfaktoren* und *Verzerrungsfaktoren* beschreiben.

5.1 Klirrfaktor

Klirrfaktoren und Verzerrungsfaktoren sind Größen, deren Werte in der Praxis durch Messungen bestimmt werden. Zur Definition der Begriffe von Klirrfaktor und Verzerrungsfaktor unterstellt man (für ein Übertragungssystem mit nicht allzu großen Nichtlinearitäten) einen (frequenzunabhängigen) Zusammenhang zwischen der Eingangsspannung $u_e(t)$ und der Ausgangsspannung $u_a(t)$ gemäß einer Potenzreihe. Dies ist eine Kennlinie entsprechend zu Bild 1.2 (Seite 2).

$$u_a(t) = \alpha_1 u_e(t) + \alpha_2 u_e(t)^2 + \alpha_3 u_e(t)^3 + \dots \quad (5.1)$$

Hierbei bedeuten die Koeffizienten:

α_1 :	Verstärkung	dimensionslos
α_2 :	Koeffizient der quadratischen Nichtlinearität	Einheit : [1/V]
α_3 :	Koeffizient der kubischen Nichtlinearität	Einheit : [1/V ²]
\vdots :	usw.	

5.1.1 Mathematische Modelle der Nichtlinearitäten

Die Potenzkennlinie ist ein mathematisches Modell, das die Realität in einigen Fällen nicht richtig wiedergibt. Beispielsweise ist in diesem Modell unterstellt, daß es nur einen momentanen Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung gibt.

Daher ist es in der Praxis auch nicht einfach (oder z.T. auch unmöglich), von den (im Spektrum) gemessenen Werten der Klirrfaktoren bzw. Verzerrungsfaktoren auf die Koeffizienten des Modells zurückzurechnen. In solchen Fällen war das Modell nicht ausreichend genau. Die Vervollkommnung führt jedoch auf einen beträchtlichen mathematischen Aufwand (z. B. *Volterra-Reihen*), welcher hier nicht betrachtet werden soll.

In aller Regel sind die Beiträge der **quadratischen** und der **kubischen** Nichtlinearität groß gegenüber denjenigen der Nichtlinearitäten höherer Ordnung. Daher beschränken sich viele Meßverfahren auf die Erfassung von Klirr- und Verzerrungsfaktoren 2. und 3. Ordnung. An dieser Stelle wird nur kurz auf die Meßtechnik für Klirr- und Verzerrungsmessungen eingegangen.

5.1.2 Die Auswirkung einer Nichtlinearität auf das Spektrum der Ausgangsspannung

Setzt man hierzu formal

$$u_e(t) \circ \bullet U_e(\omega) \quad , \quad u_a(t) \circ \bullet U_a(\omega) \quad , \quad (5.2)$$

so folgt aus Gleichung (5.1)

$$U_a(\omega) = \alpha_1 U_e(\omega) + \alpha_2 [U_e(\omega) * U_e(\omega)] + \alpha_3 [U_e(\omega) * U_e(\omega) * U_e(\omega)] + \dots \quad (5.3)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man die Auswirkung der Nichtlinearität auf die Spektralverteilung der Ausgangsspannung (im Rahmen der Gültigkeit des Modells) für einige wichtige Formen der Eingangsspannung erkennen.

5.1.3 Cosinusförmiges Eingangssignal : Klirrfaktoren

Die Messung mit cos-förmigem Eingangssignal führt auf die Klirrfaktormessung. Eine Cosinusspannung hat im Spektrum 2 Linien (beidseitige Darstellung). Gleichung (5.3) läßt sich damit unmittelbar graphisch auswerten, wie Bild 5.1 zeigt.

Für die Messung der Nichtlinearitäten ist ein Generator mit exakter, d.h. unverklirrter, Cos-Spannung erforderlich, weil die gemessenen Klirrprodukte ansonsten nicht eindeutig dem Meßobjekt zugeordnet werden können.

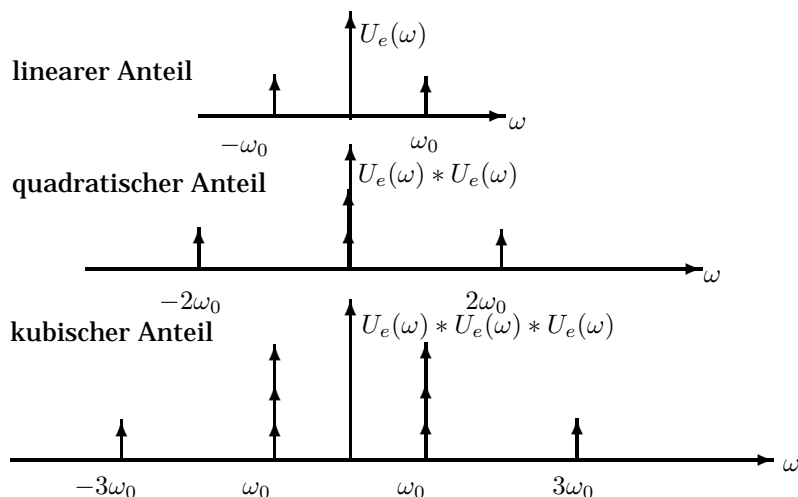


Bild 5.1: Spektralanteile durch nichtlineare Verzerrung einer Cosinus-Spannung

5.1.4 Leistung im Zeit- und Frequenzbereich

Der Klirrfaktor ist definiert als Effektivwert (bzw. die Leistung) von entstandenen Oberschwingungen, bezogen auf den Effektivwert der Grundschwingung.

Der Effektivwert einer cos-förmigen Spannung beträgt:

$$u_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u^2(t) dt} \quad T : \text{Periode} \quad (5.4)$$

Der Ausdruck unter der Wurzel stellt die Leistung des Signals (bezogen auf 1Ω) dar.

Mit dem **Parsevalschen Theorem**¹

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt}_{\text{Signalenergie im Zeitbereich}} = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |U(\omega)|^2 d\omega}_{\text{Signalenergie im Frequenzbereich}} \quad (5.5)$$

wird für ein periodisches Signal $u(t)$, das mit Hilfe der Fourier-Reihe durch ihre komplexen Koeffizienten C_n dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned} u_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u^2(t) dt && \text{Zeitbereich} \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \cdot \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \right\} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot \underbrace{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \cdot e^{jn\omega_0 t} dt}_{C_{-n}} \\ u_{\text{eff}}^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 && \text{Frequenzbereich} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Diese Aussage des Parsevalschen Theorems läßt sich in einem Blockschaltbild darstellen, Bild 5.2

5.1.5 Definition des Klirrfaktors

In Abhängigkeit vom gewählten Meßverfahren bezieht man sich auf die Grundschwingung (*selektives Meßverfahren*) auf $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$, oder auch auf den Effektivwert der Gesamtschwingung (*breitbandiges Meßverfahren*).

¹Vergleiche im Abschnitt 4 „Energiesatz“ der „Fourier-Transformation und ihre Anwendungen“.

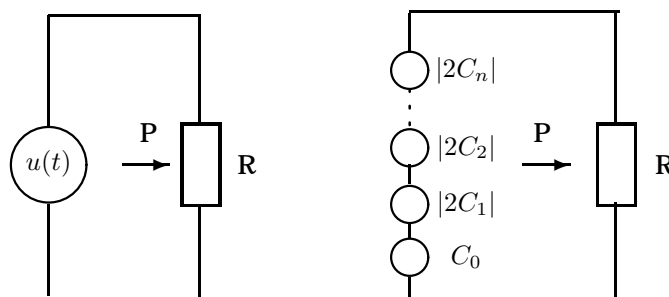


Bild 5.2: Die Leistung eines periodischen Signals in Zeit- und Frequenzbereich

fahren). Für kleine Werte des Klirrfaktors ergeben sich nur geringfügige Unterschiede zwischen den beiden Meßverfahren.

Der Klirrfaktor k wird für **breitbandige** Messung, Bild 5.3, definiert als

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{\text{Effektivwert sämtlicher Oberschwingungen}}{\text{Effektivwert sämtlicher Teilschwingungen}} \\
 &= \frac{\sqrt{|C_2|^2 + |C_3|^2 + \dots}}{\sqrt{|C_1|^2 + |C_2|^2 + |C_3|^2 + \dots}} \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

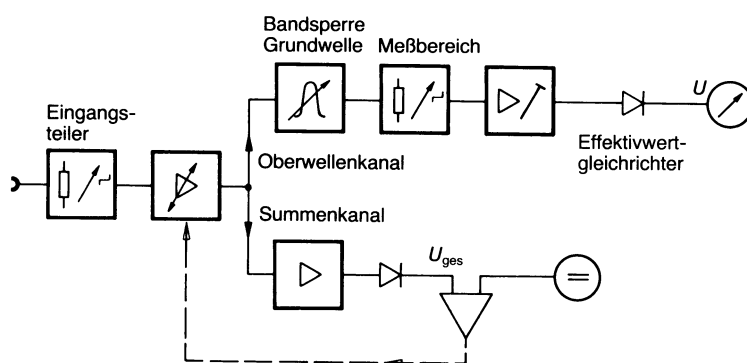


Bild 5.3: Messung des Klirrfaktors (breitbandig)

Für eine **selektive** Messung, Bild 5.4, ergibt sich daher:

$$k \approx \frac{\sqrt{|C_2|^2 + |C_3|^2 + \dots}}{|C_1|} \quad (5.8)$$

Die Werte für die C -Koeffizienten entnimmt man bei einer Messung des Klirrfaktors den Amplituden der Schwingungen auf der Grundfrequenz ω_0 und den Oberschwingungen $n\omega_0$. Der Tiefpaß (TP) verhindert, daß die Oberschwingungen des Generators das Meßergebnis verfälschen kann. Der Hochpaß (HP) verhindert, daß der Empfänger übersteuert werden kann, wenn zur Messung kleiner Teilkirrfaktoren der selektive Empfänger empfindlich eingestellt werden muß.

Die Teil-Klirrfaktoren (aus einer selektiven Messung) sind:

$$k_2 = \frac{|C_2|}{|C_1|} \quad k_3 = \frac{|C_3|}{|C_1|} \quad \dots \quad (5.9)$$

Hieraus bestimmt sich der Gesamt-Klirrfaktor zu:

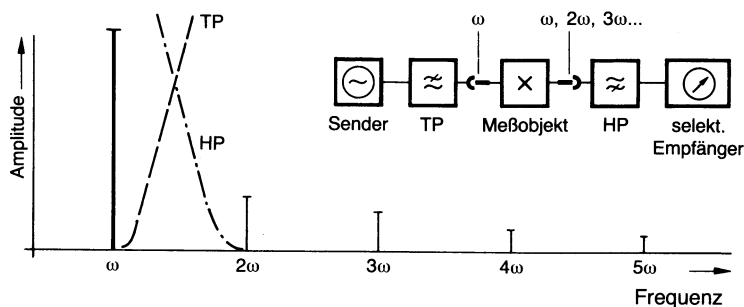


Bild 5.4: Messung des Klirrfaktors (selektiv)

$$k = \sqrt{k_2^2 + k_3^2 + \dots} \quad (5.10)$$

5.1.6 Summe von zwei cosinusförmigen Eingangssignalen : Differenzton, Verzerrungsfaktor

Dieser Fall läßt sich ebenfalls ganz einfach auswerten, was jedoch gemäß der praktischen Anwendung nur bis zur Nichtlinearität 2. Ordnung durchgeführt wird, siehe Bild 5.5.

Mit zwei cos-förmigen Spannungen **gleicher Amplitude** und nur wenig unterschiedlicher Frequenz wird der **Differenztonfaktor** gemessen.

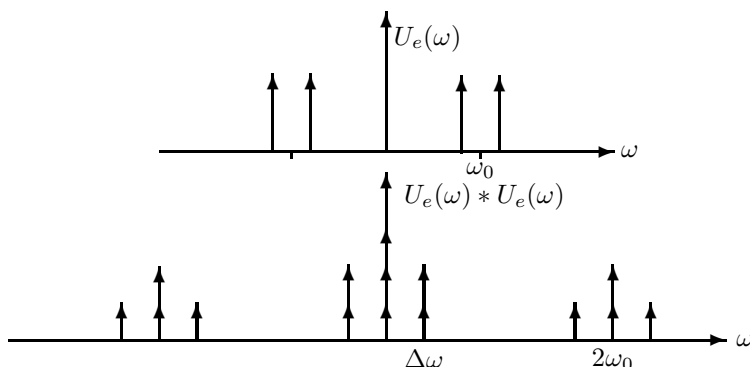


Bild 5.5: Spektralanteile durch nichtlineare Verzerrung 2. Ordnung der Summe von 2 Cosinus-Spannungen

Haben die beiden Cos-förmigen Spannungen **stark unterschiedliche Amplituden und Frequenzen**: Große Amplitude & niedrige Frequenz und kleine Amplitude & hohe Frequenz, kommt man zur **Verzerrungsmessung** [4].

5.2 Interception-Punkt

5.2.1 Interception-Punkt für die Klirrfaktoren und Klirr-Dämpfung

Die Eingangs-Spannung ist für diese Messung

$$u_e(t) = \hat{u}_e \cos(\omega_0 t) \quad (5.11)$$

Das Übertragungs-System werde durch Gleichung (5.1) beschrieben. Dann ergibt sich für die Ausgangs-Spannung

$$u_a(t) = \hat{u}_{a0} + \hat{u}_{a1} \cos(\omega_0 t) + \hat{u}_{a2} \cos(2\omega_0 t) + \hat{u}_{a3} \cos(3\omega_0 t) + \dots \quad (5.12)$$

Eine Berechnung mit Hilfe der trigonometrischen Beziehungen ergibt die folgenden Zusammenhänge.

Freq.	Amplitude der Teil-Schwingung
0	$\hat{u}_{a0} = \frac{1}{2}\alpha_2\hat{u}_e^2 + \frac{3}{8}\alpha_4\hat{u}_e^4 + \frac{10}{32}\alpha_6\hat{u}_e^6 + \frac{35}{128}\alpha_8\hat{u}_e^8 + \dots$
ω_0	$\hat{u}_{a1} = \alpha_1\hat{u}_e + \frac{3}{4}\alpha_3\hat{u}_e^3 + \frac{10}{16}\alpha_5\hat{u}_e^5 + \frac{35}{64}\alpha_7\hat{u}_e^7 + \dots$
$2\omega_0$	$\hat{u}_{a2} = \frac{1}{2}\alpha_2\hat{u}_e^2 + \frac{4}{8}\alpha_4\hat{u}_e^4 + \frac{15}{32}\alpha_6\hat{u}_e^6 + \frac{56}{128}\alpha_8\hat{u}_e^8 + \dots$
$3\omega_0$	$\hat{u}_{a3} = \frac{1}{4}\alpha_3\hat{u}_e^3 + \frac{5}{16}\alpha_5\hat{u}_e^5 + \frac{21}{64}\alpha_7\hat{u}_e^7 + \dots$
$4\omega_0$	$\hat{u}_{a4} = \frac{1}{8}\alpha_4\hat{u}_e^4 + \frac{6}{32}\alpha_6\hat{u}_e^6 + \frac{28}{128}\alpha_8\hat{u}_e^8 + \dots$
$5\omega_0$	$\hat{u}_{a5} = \frac{1}{16}\alpha_5\hat{u}_e^5 + \frac{7}{64}\alpha_7\hat{u}_e^7 + \dots$
$6\omega_0$	$\hat{u}_{a6} = \frac{1}{32}\alpha_6\hat{u}_e^6 + \frac{8}{128}\alpha_8\hat{u}_e^8 + \dots$
$7\omega_0$	$\hat{u}_{a7} = \frac{1}{64}\alpha_7\hat{u}_e^7 + \dots$
$8\omega_0$	$\hat{u}_{a8} = \frac{1}{128}\alpha_8\hat{u}_e^8 + \dots$

Tabelle 1: Amplituden der Klirr-Komponenten

Aus der Tabelle 1 ist erkennbar, daß die Amplituden sämtlicher Teil-Schwingungen des Ausgangs-Signals $u_a(t)$ von der Amplitude \hat{u}_e des Eingangs-Signals $u_e(t)$ abhängen. Betrachtet man zunächst nur den jeweils ersten Term in der Tabelle, so sieht man, daß mit Gleichung (5.9) näherungsweise folgende Abhängigkeit besteht:

$$k_2 \approx \frac{1}{2}\alpha_2\hat{u}_e; \quad k_3 \approx \frac{1}{4}\alpha_3\hat{u}_e^2; \quad k_4 \approx \frac{1}{8}\alpha_4\hat{u}_e^3; \dots \quad (5.13)$$

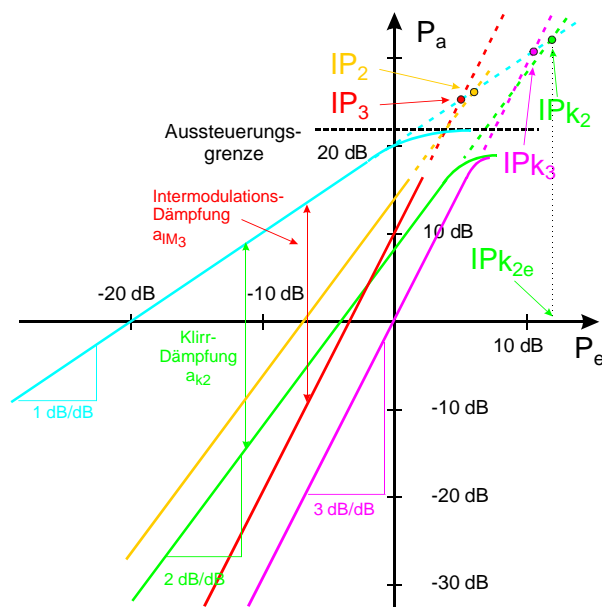


Bild 5.6: Intercept-Punkte IP_2 und IP_3 (Intermodulation), sowie IP_{k_2} und IP_{k_3} (Klirrfaktor) im Diagramm Ausgangs-Pegel P_a als Funktion des Eingangs-Pegels P_e eines Übertragungssystems.

Der Wert der Klirrfaktoren vergrößert sich mit der Amplitude \hat{u}_e der Eingangs-Spannung in einer Potenz, die der Ordnungszahl der Klirrfaktoren weniger eins entspricht. Diese Abhängigkeit wird in einem Dia-

gramm aufgetragen, wobei die Amplituden der Spannungen in logarithmischem Maßstab (Pegel) gewählt werden. Man erhält damit den Intercept-Punkt für die Klirrfaktoren, Bild 5.6. Die gestrichelten Geraden berücksichtigen nur die Terme in Gleichung (5.13), was meßtechnisch für kleine Eingangspegel P_e recht genau zutrifft.

Der Abstand zwischen dem linearen Term mit Steigung $1dB/dB$ und den Klirranteilen mit Steigung $2dB/dB$ für die 2. Ordnung und $3dB/dB$ für die 3. Ordnung gibt die jeweilige (Aussteuerungs-abhängige) Klirrdämpfung an. Ein System ist um so linearer, je größer die Werte für die Interception-Punkte sind.

5.2.2 Interception-Punkt für Zweiton-Aussteuerung: Intermodulation

Bei der Messung der Zweiton-Aussteuerung ist die Eingangs-Spannung

$$u_e(t) = \hat{u}_{e1} \cos(\omega_1 t) + \hat{u}_{e2} \cos(\omega_2 t); \quad \text{i.a. ist } \hat{u}_{e1} = \hat{u}_{e2} \tag{5.14}$$

Wird diese in die Gleichung (5.1) für die Kennlinie des Systems eingesetzt, ergeben sich außer den Vielfachen auch noch Kombinations-Frequenzen. In der folgenden Tabelle sind nur die ersten Terme berücksichtigt. Bild 5.7 zeigt die Zeitfunktion bei einer Zweitonaussteuerung. Durch die sich ergebende „Schwebung“ wird die Kennlinie des Übertragungs-Systems (periodisch) durchgewobelt.

Frequenzen	Amplituden
0	$\frac{1}{2} \alpha_2 (\hat{u}_{e1}^2 + \hat{u}_{e2}^2)$
ω_1	$\alpha_1 \hat{u}_{e1}$
ω_2	$\alpha_1 \hat{u}_{e2}$
$2\omega_1$	$\frac{1}{2} \alpha_2 \hat{u}_{e1}^2$
$2\omega_2$	$\frac{1}{2} \alpha_2 \hat{u}_{e2}^2$
$\omega_1 - \omega_2, \omega_1 + \omega_2$	$\alpha_2 \hat{u}_{e1} \hat{u}_{e2}$
$3\omega_1$	$\frac{1}{4} \alpha_3 \hat{u}_{e1}^3$
$3\omega_2$	$\frac{1}{4} \alpha_3 \hat{u}_{e2}^3$
$2\omega_1 - \omega_2, 2\omega_1 + \omega_2$	$\frac{3}{4} \alpha_2 \hat{u}_{e1}^2 \hat{u}_{e2}$
$2\omega_2 - \omega_1, 2\omega_2 + \omega_1$	$\frac{3}{4} \alpha_2 \hat{u}_{e1} \hat{u}_{e2}^2$

Zweiton-Aussteuerung

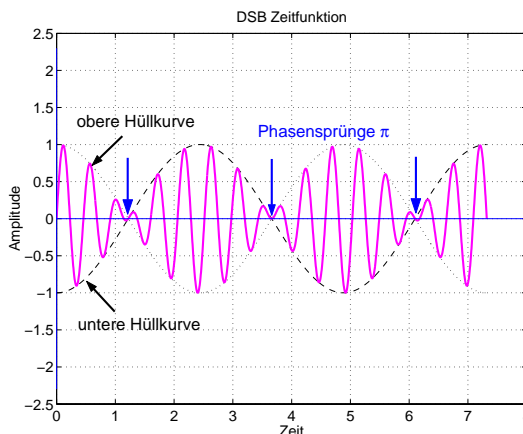


Bild 5.7: Zeitfunktion bei der Zweiton-Aussteuerung: Die Kennlinie wird durchgewobelt

Damit ergibt sich das Intermodulations-Spektrum gemäß Bild 5.8.

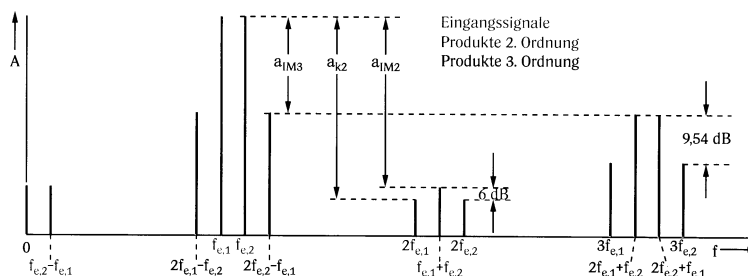


Bild 5.8: Betrags-Spektrum bei Zweitonaussteuerung (bis 3. Ordnung) und die dabei entstehenden Klirr- und Intermodulations-Abstände

Aus den Faktoren der Tabelle ergeben sich die dB Werte im Spektrum. Man erkennt, daß die Intermodulationsprodukte größere Werte haben als die Klirrpunkte. Die Intermodulations-Abstände a_{IM_2} bzw. a_{IM_3} sind geringer als die Klirr-Abstände a_{k_2} bzw. a_{k_3} . Demzufolge liegen die Intercept-Punkte für die Intermodulationen niedriger als die betreffenden Intercept-Punkte für die Klirrfaktoren.

5.2.3 Verzerrungs-Messung

Das zu messende Übertragungs-System erhält wieder eine Summe von zwei Eingangs-Spannungen. Im Unterschied zur Differenzton-Messung erhält die Spannung mit der niedrigen Frequenz ω_a (Ablenk-Spannung) eine große Amplitude und die Spannung mit der hohen Frequenz ω_m (Meß-Spannung) eine sehr kleine Amplitude.

Anschaulich wird durch die Ablenk-Spannung die Kennlinie des Übertragungs-Systems „durchgewobelt“. Ist die Steigung nicht konstant, ergibt sich je nach momentanem Arbeitspunkt eine größere oder geringere Verstärkung der Meß-Spannung. Im Ausgang des Systems entsteht eine modulierte Form der Meß-Spannung. Aus der Änderung von deren Hüllkurve schließt man auf die Nichtlinearitäten der Kennlinie des Systems, Bild 5.9.

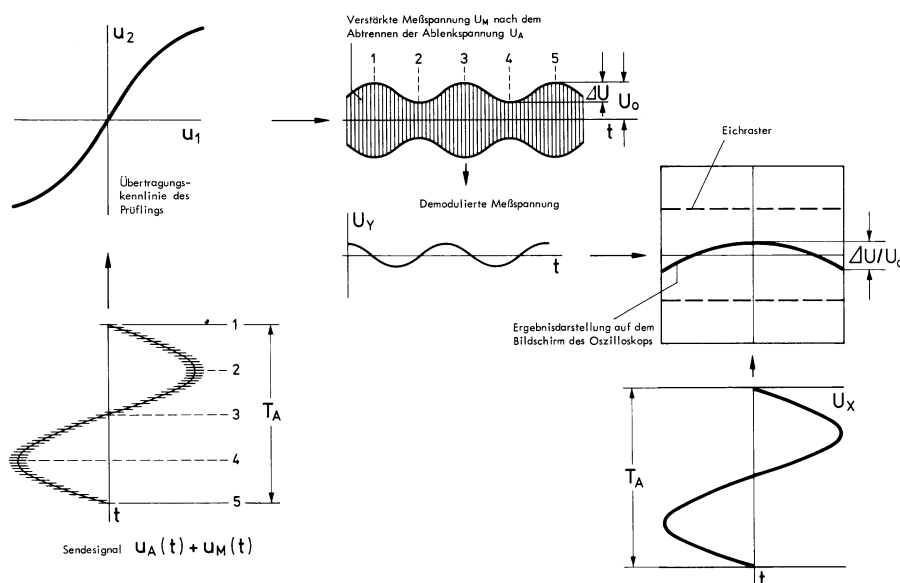


Bild 5.9: Prinzip der Messung der Steilheitsverzerrungen mit dem Intermodulations-Verfahren

Verwendet man zusätzlich einen Phasendemodulator, können auch noch Schwankungen der Gruppenlaufzeit gemessen werden.

5.3 Rechteckförmige Spektralbelegung des Eingangssignals

Hier handelt es sich um die Verallgemeinerung auf mehr als 2 Cos-förmige Eingangssignale. Dieser wichtige Fall kommt z.B. bei Breitband-Übertragungssystemen (Vielkanalsysteme) vor.

Während man aufgrund einer Klirrfaktor-Messung zu der falschen Meinung kommen könnte, daß sich eine nichtlineare Verzerrung nur in den „oberen“ Kanälen auswirkt, zeigt dieser Fall, daß es sich bei Breitbandsystemen tatsächlich genau umgekehrt verhält.

Man erkennt hieraus, in welchem Nachrichtenkanal die größten Störungen durch nichtlineare Verzerrungen auftreten, wie es Bild 5.10 am Beispiel einer quadratischen Nichtlinearität zeigt.

Solche Vielkanalsysteme sind z.B. die Trägerfrequenzsysteme der Telekom oder Kabel-Anlagen zur Verteilung von Radio- und Fernsehprogrammen. Hier besteht die Forderung, daß ein Übersprechen z. B. zwischen den einzelnen Telefon-Kanälen vermieden wird (Übersprechdämpfung z.B. > 60 dB) bzw. die verschiedenen im Kabel befindlichen Programme sich nicht gegenseitig stören dürfen. Daraus resultieren sehr hohe Forderungen an die Linearität der Vielkanalsysteme.

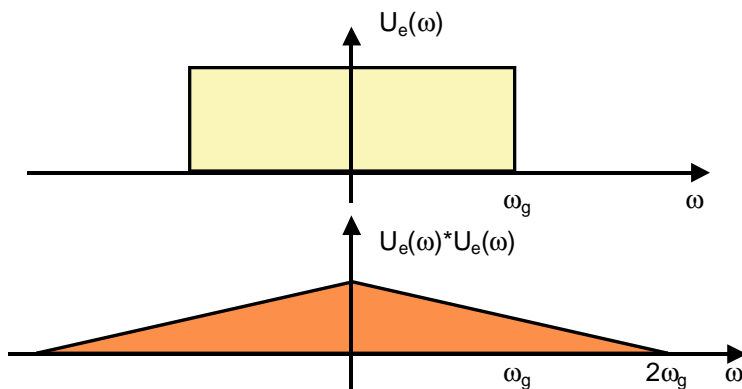


Bild 5.10: Störpektrum bei gleichförmiger Belegung des Spektrums durch das Eingangssignal auf Grund einer quadratischen Nichtlinearität

5.3.1 Rauschkliir-Messung

Eine gleichmäßige spektrale Belegung erzeugt man mit Hilfe einer (Gauß-verteilten) Rausch-Spannung. Damit man das Störpektrum (Leistungs-Dichte-Spektrum) messen kann, obwohl es wegen seiner viel geringeren Leistung vom linear verstärkten Rauschen total verdeckt wird, werden in das Spektrum des Rauschens des Eingangs-Signals (durch steilflankige Filter) Lücken eingeblendet. Auf diese Weise kann das Klirrgeräusch (zusammen mit dem Grundrauschen des Systems) an verschiedenen Stützstellen gemessen werden, Bild 5.11.

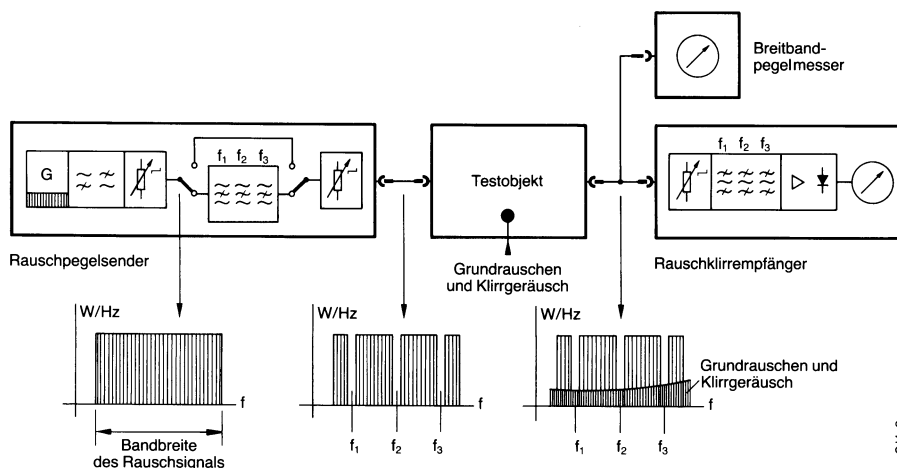


Bild 5.11: Prinzip des Rauschkliirmeßverfahrens

5.4 Nichtlineare Verzerrungen bei Tiefpaß-, Bandpaß-, Hochpaß-Systemen

Ein Tiefpaß überträgt alle Frequenzen bis zu einer Grenzfrequenz ω_t . Ein Bandpaß überträgt in einem Frequenzbereich $\omega_u \leq \omega \leq \omega_o$. Ein Hochpaß überträgt alle Frequenzen oberhalb einer Grenzfrequenz ω_h , Bild 5.12 .

Der Vergleich der Übertragungssysteme Bild 5.12 mit den Spektralverteilungen des Klirrfaktors Bild 5.1, des Verzerrungsfaktors Bild 5.5 und der gleichförmigen Spektralbelegung Bild 5.10 zeigt:

TP Der *Klirrfaktor* läßt sich nur für breitbandige Tiefpaßsysteme bestimmen. Dabei kann in Abhängigkeit von der Ordnung des Klirrfaktors nur mit relativ *niedriger* Frequenz der Cosinus-Spannung gemessen werden. D. h. k_2 bis $\omega_t/2$, k_3 bis $\omega_t/3$ usw.

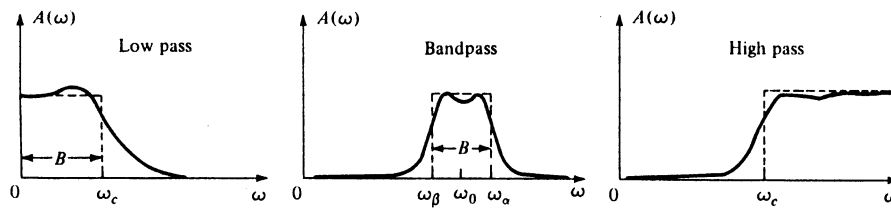


Bild 5.12: Tiefpaß, Bandpaß, Hochpaß

HP Der *Klirrfaktor* läßt sich für Hochpaßsysteme bestimmen.

BP Für schmalbandige Bandpässe läßt sich *kein Klirrfaktor* bestimmen.

TP Der *Differenztonfaktor* läßt sich auch für die höherfrequenten Bereiche eines Tiefpaßsystems bestimmen, für die kein Klirrfaktor mehr meßbar ist.

Die *gleichförmige Spektralbelegung* entspricht dem Fall eines Breitbandsystems in der Praxis. Der *Differenztonfaktor* ist eine Meßgröße, die diesem Fall am nächsten kommt.

6 Systeme mit starker Nichtlinearität

Bei stark nichtlinearen Systemen treten teils unvorhergesehene, teils „chaotische“ Phänomene auf. Hier soll nur beispielhaft das Verhalten eines nichtlinearen Schwingkreises betrachtet werden.

Mit dem Modell einer Potenzkennlinie, Gleichung (5.1) (Seite 23) werden die Auswirkungen nichtlinearer Energiespeicher, wie z.B. von Kapazitätsdioden oder Spulen mit magnetischer Sättigung im Eisen, nicht erfaßt.

Nichtlineare Kapazitäten (z.B. Kapazitätsdioden oder Collector-Kapazitäten von Transistoren) ergeben in Schwingkreisen Resonanzkuven, deren Spitze (mit steigender Amplitude der Spannung am Schwingkreis) sich zu tieferen Frequenzen hin neigt. Dadurch kann es bei solchen Resonanzkurven zu Bereichen kommen, die eine *negative Steigung* haben. Diese Bereiche sind nicht stabil. Bei der Durchstimmung eines solchen Schwingkreises treten dann *Sprungeffekte* oder *Zieherscheinungen* auf. Abhilfe für praktische Anwendungen besteht in der Entkopplung der nichtlinearen Kapazität (z.B. im Kollektor) mit Hilfe eines Serienwiderstandes. Für nichtlineare Induktivitäten (z.B. gesättigte Ferrite) treten entsprechende Erscheinungen auf (Ferroresonanz), wobei sich die Resonanzkurven hier zu höheren Frequenzen neigen, Bild 6.1. [5] Die mathematische Behandlung führt auf die *Duffingsche Differentialgleichung*.

Entsprechende Resonanzerscheinungen finden sich auch bei nichtlinearen mechanischen Systemen [6], so z.B. auch bei Lautsprechern.

Literatur

- [1] Poularkis, A. D.; Seely, S.: *Signals and Systems*, PWS-Kent, 2nd ed. 1990
- [2] Papoulis, A.: *The Fourier Integral and its Applications*, McGraw Hill, 1962
- [3] Bracewell, R. N.: *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw Hill, 2nd ed. revised 1986
- [4] Schuon, E.; Wolf, H. : *Nachrichten-Meßtechnik*, Springer 1981
- [5] Ollendorf, F.: *Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik*, Springer, 1926
- [6] Dinca, F., Teodosiu, C.: *Nonlinear and Random Vibrations*, Editura Academiei & Academic Press, 1973
- [7] Schleifer, W.D.: *Hochfrequenz- und Mikrowellen-Meßtechnik in der Praxis*, Hüthig, 1981
- [8] Rauscher, C.: *Grundlagen der Spektrumanalyse*, Rohde & Schwarz, 2000
- [9] Wandel & Goltermann, *Nachrichtenübertragungstechnik*, Firmendruckschrift, 1989

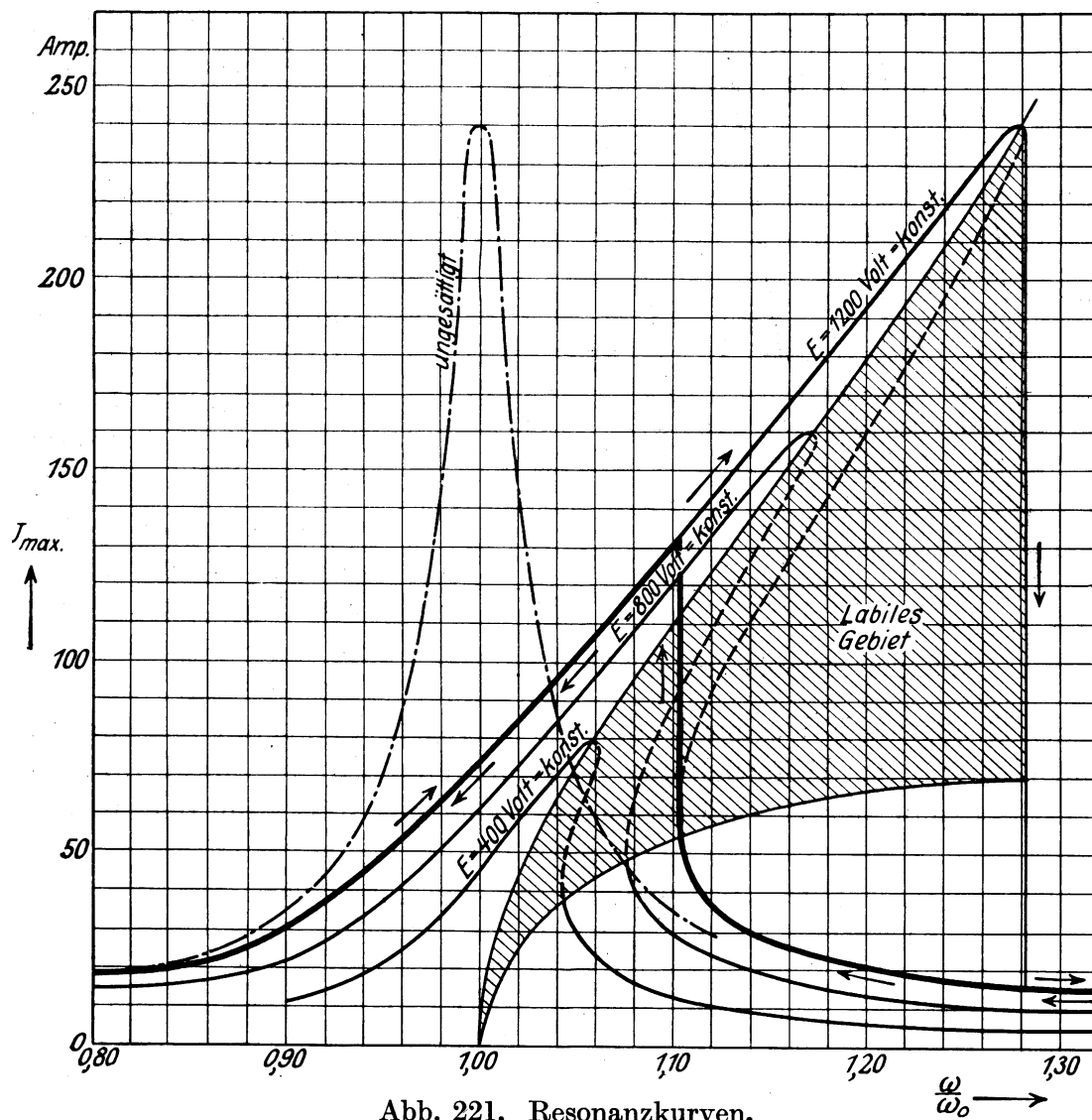


Abb. 221. Resonanzkurven.

Bild 6.1: Schwingkreis mit Sättigungs-Erscheinungen der Induktivität: Ferro-Resonanz