

# Tiefpaß-Systeme

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Das ideale Tiefpaß-System (Küpfmüller-Tiefpaß)</b>	<b>1</b>
1.1 Die Übertragungsfunktion des Küpfmüller-TP	1
1.2 Die Impulsantwort des idealen Tiefpaß-Systems	2
1.3 Die Sprungantwort des idealen Tiefpaß-Systems	3
1.4 Die Anstiegszeit $t_r$ der Sprungantwort	4
1.5 Die Verformung eines Rechteckimpulses	5
<b>2 Linearphasige TP-Systeme mit Amplitudenverzerrungen</b>	<b>6</b>
2.1 Die mittlere Grenzfrequenz eines Tiefpaß-Systems	6
2.2 Die äquivalente Leistungsbandbreite	7
2.3 Darstellung der allgemeinen Amplitudenverzerrung mit Hilfe von idealen Tiefpaß-Systemen	7
2.4 Tiefpässe mit cos-förmiger Amplitudenverzerrung	8
2.5 Der Gauß-Tiefpaß	10
2.5.1 Mittlere Breite der Impulsantwort und Anstiegszeit der Sprungantwort	11
2.5.2 Mittlere Grenzfrequenz und 3 dB Grenzfrequenz	11
2.5.3 Technische Anwendung: Vertikal-Verstärker des Oszilloskops	12
2.5.4 Datenverrundung mit Gauß-TP	12
<b>3 Tiefpaß-Systeme mit Phasenverzerrung</b>	<b>12</b>
3.1 Gauß-Tiefpaß-Systeme mit Phasenverzerrung	12
3.1.1 Sinusförmige Phasenverzerrung	13
3.2 Systeme mit Amplituden- und Phasenverzerrungen	13

## Abbildungsverzeichnis

1.1 Die Übertragungsfunktion eines „idealen“ Tiefpasses (Küpfmüller TP)	1
1.2 Die Impulsantwort des idealen Tiefpaß-Systems	2
1.3 Definition der mittleren Breite der Impulsantwort $t_i$ mit flächengleichem Rechteck	3
1.4 Der Integral-Sinus $\text{Si}(x)$	3
1.5 Sprungantwort $a(t)$ des idealen Tiefpaß-Systems (mit Phase $\Theta(\omega) = 0$ )	3
1.6 Die Sprungantwort des idealen Tiefpaß-Systems (mit Phase $\Theta(\omega) = \omega t_0$ )	4
1.7 Zerlegung des Impulses $\square_{T/2}(t)$ in 2 Sprungfunktionen	5
1.8 Ausgangssignal eines idealen TP für rechteckförmiges Eingangssignal $\square_{T/2}(t)$ in Abhängigkeit vom Verhältnis der Impulsbreite $T$ zur Anstiegszeit $t_r$	5
2.1 Zur Definition der mittleren Grenzfrequenz eines Tiefpaß-Systems	6
2.2 Zur Definition der Leistungsbandbreite	7
2.3 Die Übertragungsfunktion eines Tiefpasses mit Amplitudenverzerrung und linearer Phase	7
2.4 Amplitudengang eines Tiefpasses mit cosinusförmiger Verzerrung	8
2.5 Tiefpaß mit Cos-förmiger Amplitudenverzerrung als Parallelschaltung aus 3 idealen Tiefpässen (einseitige Darstellung) mit unterschiedlicher Phase	8
2.6 Impulsantwort $h(t)$ und Sprungantwort $a(t)$ eines Tiefpaß-Systems mit Cos-förmiger Amplitudenverzerrung. $h(t)$ hat Echos und $a(t)$ hat Stufen. Der Abstand von $t_0$ ist $\pm \frac{n\pi}{\omega_c}$ mit $n = 7$ entsprechend zu Bild 2.4.	9
2.7 Vergleich der Impulsantworten von Systemen mit steigender bzw. fallender Dämpfung mit der Frequenz	9
2.8 Der $\cos^2$ -Tiefpaß und seine Impulsantwort. Die Echos – <i>gestrichelt gezeichnet</i> – ergeben zusammen mit dem Hauptimpuls eine besonders glatte Impulsantwort.	10
2.9 Der Gauß-Tiefpaß mit Impulsantwort $h(t)$	10
2.10 Die Sprungantwort des Gauß Tiefpasses	11
2.11 Impuls-Formung durch einen Gauß Tiefpaß. Optimal ist $T/t_r = 2$ .	12
3.1 Tiefpaß-System mit geringer Phasenverzerrung	12
3.2 Impulsantwort $h(t)$ und Sprungantwort $a(t)$ eines Tiefpaßsystems mit Phasenverzerrung	13

---

3.3 Grundsätzliche Auswirkung von Amplituden- und Phasengang bzw. Gruppenlaufzeit auf die Impuls- und Sprungantwort . . . . .	14
---	----

# Tiefpaß-Systeme

## Systemtheoretische Beschreibung

In diesem Kapitel werden Tiefpaß-Systeme unter dem Aspekt der *systemtheoretischen Betrachtungsweise* analysiert. Bei der systemtheoretischen Betrachtungsweise geschieht die Definition des Systems über den Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgröße. Derart definierte Systeme sind idealisiert, d.h. sie sind so nicht realisierbar und oft noch nicht einmal kausal. Wenngleich viele Eigenschaften realer Filter-Systeme auf diese Weise ignoriert werden, gewinnt man damit einfache und in der Praxis trotzdem mit ausreichender Genauigkeit handhabbare Aussagen und Abschätzformeln für

- Einschwingzeit und Anstiegszeit
- äquivalente Bandbreite, Leistungsbandbreite, Rauschbandbreite
- typische Signalverzerrungen und Impulsverbreiterungen

Der **Küpfmüller-Tiefpaß**, welcher durch die Annahme einer linearen Phase damit per Definition zum **Idealen Tiefpaß** wird, liefert schließlich Näherungsformeln zu Tiefpässen mit *Amplitudenverzerrung*.

Der **Gauß-Tiefpaß** gestattet es, die Auswirkungen von *Phasenverzerrungen* bei Tiefpässen näherungsweise zu beschreiben.

## 1 Das ideale Tiefpaß-System (Küpfmüller-Tiefpaß)

### 1.1 Die Übertragungsfunktion des Küpfmüller-TP

Das ideale (bzw. idealisierte) Tiefpaß-System hat eine *rechteckförmige Durchlaßkurve* und eine *lineare Phase*, Bild 1.1.

$$A(\omega) = \begin{cases} A_0 & \text{für } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{für } |\omega| > \omega_c \end{cases} = A_0 \cdot \Pi_{\omega_c}(\omega) \quad (1.1)$$

$$\Theta(\omega) = \omega t_0 \quad (1.2)$$

$$H(\omega) = A_0 \cdot \Pi_{\omega_c}(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} \quad (1.3)$$

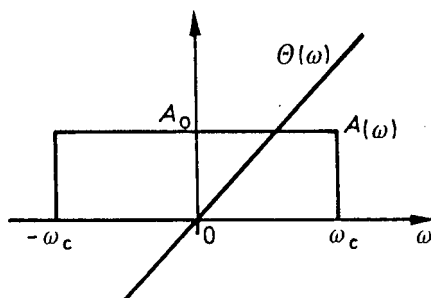


Bild 1.1: Die Übertragungsfunktion eines „idealen“ Tiefpasses (Küpfmüller TP)

Innerhalb seines Durchlaßbereiches gestattet der „ideale“ Tiefpaß eine verzerrungsfreie Übertragung. Man ist daher bestrebt, diesem idealen Verlauf bei einer praktischen Realisierung möglichst nahe zu kommen. Dies ist jedoch nicht ohne weiteres möglich, wie man aus dem Verlauf der Impulsantwort des „idealen“ Tiefpasses erkennt: Die Impulsantwort  $h(t)$  ist ein  $\sin(x)/x$ , der bei  $t \rightarrow -\infty$  beginnt. Daher ist ein „idealer“ Tiefpaß *nicht kausal* und demzufolge auch *nicht realisierbar*.

Jedoch liefern die recht einfachen Zusammenhänge wichtige Abschätzformeln z.B. für:

- Laufzeit, Einschwingzeit, Anstiegszeit
- Impulsverbreiterung, Impulsverformung

## 1.2 Die Impulsantwort des idealen Tiefpaß-Systems

Die Impulsantwort  $h(t)$  ergibt sich aus der Fourier-Rücktransformation der Übertragungsfunktion  $H(\omega)$ , Gl.(1.3) und Bild 1.2. Vergleiche hierzu auch den *Zeitverschiebungs-Satz* der Fourier-Transformation.

$$h(t) = \frac{A_0}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \cos\{\omega(t - t_0)\} d\omega = \frac{A_0 \sin\{\omega_c(t - t_0)\}}{\pi(t - t_0)} = \frac{A_0 \omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_c(t - t_0))}{\omega_c(t - t_0)} \quad (1.4)$$

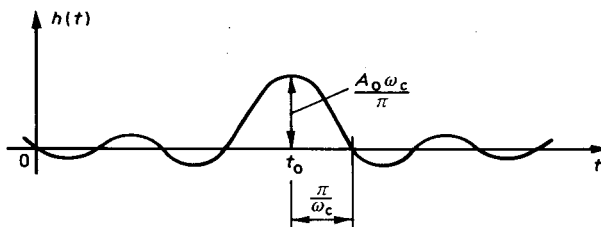


Bild 1.2: Die Impulsantwort des idealen Tiefpaß-Systems

Aus der Impulsantwort  $h(t)$  lassen sich folgende Eigenschaften eines idealen Tiefpaß-Systems ablesen.

- Das ideale Tiefpaß-System ist **nicht kausal**, denn die Impulsantwort  $h(t)$  beginnt bei  $t = -\infty$ .  
Für ein kausales System können der Amplitudengang  $A(\omega)$  und der Phasengang  $\Theta(\omega)$  nicht unabhängig von einander vorgegeben werden.<sup>1</sup>
- Das Maximum des Ausgangsimpulses  $h_{\max}$  erscheint nach der Zeit  $t = t_0$ .

$$h(t_0) = h_{\max} = \frac{A_0 \omega_c}{\pi} \quad (1.5)$$

$t_0$  ist die **Laufzeit** des Systems. Da der ideale TP eine lineare Phase hat, ist hierbei die *Phasen-Laufzeit*  $t_{\text{ph}}$  identisch mit der *Gruppen-Laufzeit*  $t_{\text{gr}}$ .

- Die Fläche unter der Impulsantwort beträgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = a(\infty) = A(0) = A_0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{Zentralordinate des Amplitudengangs } A(0) \quad (1.6)$$

Die Zentralordinate des Amplitudengangs  $A_0$  ist gleich dem Wert der Sprungantwort  $a(\infty)$  für  $t \rightarrow \infty$  (eingeschwungener Zustand).

- Der Ausgangsimpuls wird verbreitert. Für den Abstand  $\Delta t$  zwischen den 1. Nullstellen rechts bzw. links des Hauptmaximums gilt, vergleiche Bild 1.2:

$$\boxed{\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{1}{f_c}} \quad \text{Breite des Hauptmaximums} \quad (1.7)$$

Hierbei ist  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$  die Grenzfrequenz des id. TP.

- Die **mittlere Breite**  $t_i$  des Ausgangsimpulses, definiert als *flächengleiches Rechteck* mit der Höhe  $h_{\max}$ , wird: (siehe Bild 1.3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = A_0 = h_{\max} \cdot t_i = \frac{A_0 \omega_c}{\pi} \cdot t_i \quad (1.8)$$

Daraus folgt

$$\boxed{t_i = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{1}{2f_c} = \frac{\Delta t}{2}} \quad \text{mittlere Breite der Impulsantwort} \quad (1.9)$$

<sup>1</sup>Siehe das Kapitel Kausalitätsbedingungen im LTI Umdruck.

Beim idealen Tiefpaß (Küpfmüller-Tiefpaß) ist damit die mittlere Breite der Impulsantwort gleich der halben Breite des Hauptmaximums. Dies trifft näherungsweise auch für reale TP-Systeme zu.

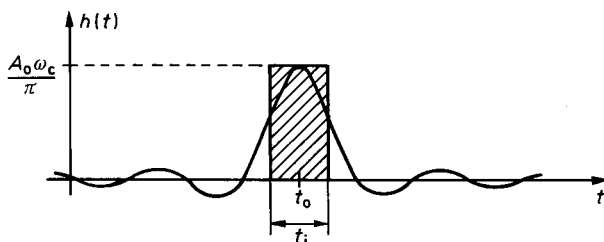


Bild 1.3: Definition der mittleren Breite der Impulsantwort  $t_i$  mit flächengleichem Rechteck

### 1.3 Die Sprungantwort des idealen Tiefpaß-Systems

Die Sprungantwort eines LTI-Systems ergibt sich zu<sup>2</sup>:

$$a(t) = \frac{A(0)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega)}{\omega} \cdot \sin\{\omega(t - t_0)\} d\omega \tag{1.10}$$

In diese Gleichung werden die speziellen Werte für den idealen Tiefpaß aus Gleichung (1.3) eingesetzt:

$$a(t) = \frac{A_0}{2} + \frac{A_0}{\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\sin\{\omega(t - t_0)\}}{\omega} d\omega \tag{1.11}$$

Mit der Substitution  $\omega(t - t_0) = x$  wird daraus für die Sprungantwort  $a(t)$ , Bild 1.5:

$$a(t) = \frac{A_0}{2} + \frac{A_0}{\pi} \int_{-\omega_c(t-t_0)}^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{A_0}{2} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \text{Si}\{\omega_c(t - t_0)\} \right\} \tag{1.12}$$

Das in Gleichung (1.12) auftretende Integral ist der *Integral-Sinus*  $\text{Si}(x)$ , siehe Bild 1.4<sup>3</sup>:

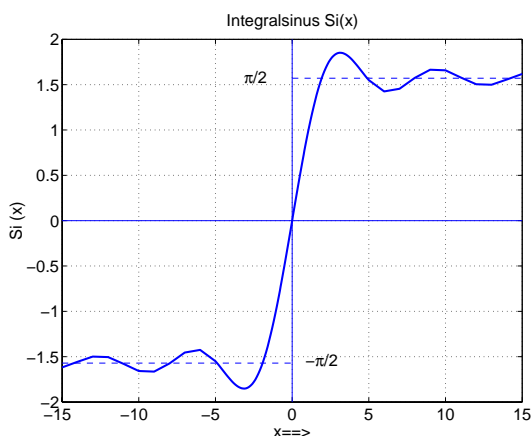


Bild 1.4: Der Integral-Sinus  $\text{Si}(x)$

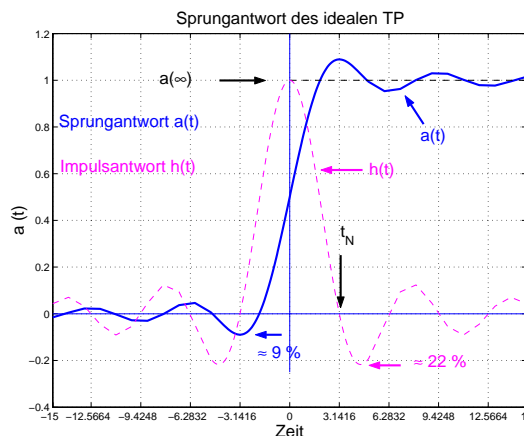


Bild 1.5: Sprungantwort  $a(t)$  des idealen Tiefpaß-Systems (mit Phase  $\Theta(\omega) = 0$ )

<sup>2</sup>Siehe hierzu LTI, Kapitel 3.3

<sup>3</sup>Siehe auch Anwendungen der Fourier-Transformation: Kapitel 4.6.7 „Sprungantwort des idealen TP und das Gibbs'sche Phänomen“

$$\text{Si}(x) = -\frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^x \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi \quad (1.13)$$

Ohne Berücksichtigung der Laufzeit  $t_0$  ist in Bild 1.5 die Impuls- und die Sprungantwort des idealen TP dargestellt. Damit wird der Verlauf der Sprungantwort  $a(t)$  des idealen Tiefpasses mit Berücksichtigung der Laufzeit  $t_0$  wie in Bild 1.6 gezeigt.

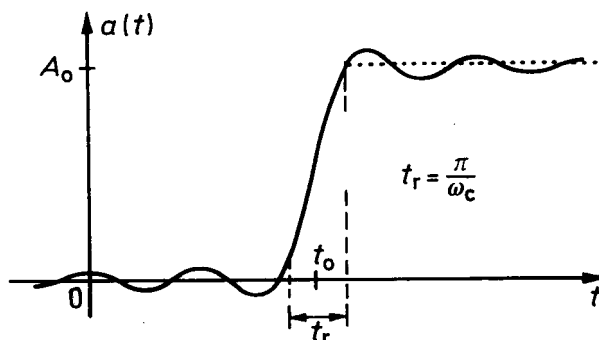


Bild 1.6: Die Sprungantwort des idealen Tiefpaß-Systems (mit Phase  $\Theta(\omega) = \omega t_0$ )

#### 1.4 Die Anstiegszeit $t_r$ der Sprungantwort

Zur Definition der Anstiegszeit  $t_r$  wird der Integralsinus durch eine Tangentennäherung (Rampenfunktion) ersetzt. Der Rampenanstieg wird dabei gleich der größten Steilheit des Integralsinus gewählt, Bild 1.6. Die größte Steilheit des Integralsinus ist beim Punkt  $[t_0, a(\infty)/2]$ , wo ein Wendepunkt liegt.

Der daraus gewonnene Wert für die Anstiegszeit  $t_r$  ist demzufolge ein unterer Grenzwert für die Anstiegszeit eines realen Systems.

Mit dem Zusammenhang

$$h(t) = \frac{d a(t)}{dt} \quad (1.14)$$

folgt für den Punkt größter Steigung der Sprungantwort:

$$\left. \frac{d a(t)}{dt} \right|_{\max} = \left. \frac{d a(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = h(t)_{\max} = h_{\max} = h(t_0) = \frac{A_0 \omega_c}{\pi} \quad (1.15)$$

Da die Steigung der Tangente (Rampe) in Bild 1.6  $A_0/t_r$  beträgt, folgt:

$$\frac{A_0}{t_r} = \frac{A_0 \omega_c}{\pi} \quad (1.16)$$

Nach der Anstiegszeit  $t_r$  aufgelöst ergibt sich damit:

$$\boxed{t_r = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{1}{2f_c}} \quad \text{Anstiegszeit also: } \boxed{t_r = t_i} \quad (1.17)$$

Die minimale Anstiegszeit  $t_r$  der Sprungantwort und die mittlere Impulsbreite  $t_i$  der Impulsantwort sind also gleich groß.

#### Gibbs'sches Phänomen und Fensterung

Da die Sprungantwort die Form eines Integralsinus hat, ist der erste Überschwinger der Sprungantwort – unabhängig von der Anstiegszeit  $t_r$  und damit auch unabhängig von der Bandbreite  $\omega_c$  – immer gleich groß, nämlich 8,95 %, vergleiche Bild 1.4. Damit erklärt sich das *Gibbs'sche Phänomen*. Die Bewertung mit einem idealen Tiefpaß entspricht einer Fensterung mit einem Rechteckfenster, siehe Kapitel 4 Kausalitätsbedingungen im LTI Umdruck. Technisch tritt eine Fensterung bei der Realisierung von digitalen FIR-Filtern (finite impulse response) auf.

### 1.5 Die Verformung eines Rechteckimpulses

Wird ein Rechteckimpuls (idealer Datenimpuls) über ein Tiefpaßsystem übertragen, so entsteht am Ausgang des TP-Systems ein verzerrter (verrundeter) Impuls.

Ein Rechteckimpuls  $\Pi_{T/2}(t)$  läßt sich mit Hilfe von 2 Sprungfunktionen darstellen.<sup>4</sup> Bild 1.7 zeigt diese Zerlegung des Rechteckimpulses  $\Pi_{T/2}(t)$ .

$$\Pi_{T/2}(t) = \sigma(t + T/2) - \sigma(t - T/2) \tag{1.18}$$

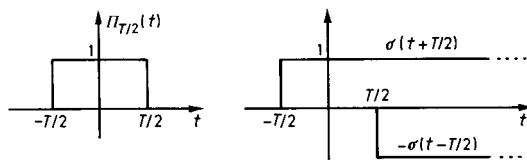


Bild 1.7: Zerlegung des Impulses  $\Pi_{T/2}(t)$  in 2 Sprungfunktionen

Damit folgt für das Ausgangssignal  $x_a(t)$  mit Gleichung (1.12):

$$x_a(t) = \frac{1}{\pi} \{ \text{Si}\{\omega_c(t - t_0 + T/2)\} - \text{Si}\{\omega_c(t - t_0 - T/2)\} \} \tag{1.19}$$

Für eine Datenübertragung wählt man die Bandbreite genau so groß, daß der Ausgangsimpuls gerade auf sein Maximum kommt.<sup>5</sup> Dieses Maximum wird dann erreicht, wenn das 1. Maximum des aufsteigenden  $\text{Si}(t)$  mit dem entsprechenden Überschwinger des absteigenden  $\text{Si}(t)$  zusammenfällt. Damit ergibt sich die Bedingung, siehe Bild 1.8,

$$T = 2 \cdot t_r \rightsquigarrow \frac{T}{t_r} = 2 \quad \text{für volle Amplitude des Ausgangssignals.} \tag{1.20}$$

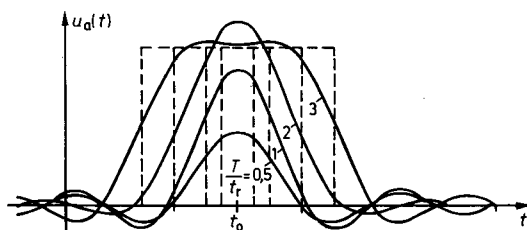


Bild 1.8: Ausgangssignal eines idealen TP für rechteckförmiges Eingangssignal  $\Pi_{T/2}(t)$  in Abhängigkeit vom Verhältnis der Impulsbreite  $T$  zur Anstiegszeit  $t_r$

Da das 1. Maximum des  $\text{Si}(t)$  exakt bei der 1. Nullstelle des  $\frac{\sin(x)}{x}$  liegt, also um  $t_r$  vom Maximum des  $\frac{\sin(x)}{x}$  entfernt, läßt sich damit die notwendige Grenzfrequenz  $\omega_c$  leicht bestimmen. Es gilt für gegebene Datendauer  $T$  :

$$T = 2 \cdot t_r = 2 \cdot \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{1}{f_c} \tag{1.21}$$

Daraus folgt für die minimale notwendige Breite des (idealen) Tiefpasses

$$\boxed{\omega_c = \frac{2\pi}{T} \quad \rightsquigarrow \quad f_c = \frac{1}{T}} \tag{1.22}$$

<sup>4</sup>Dies entspricht in der Tat der Vorgehensweise der vereinfachten Faltung:  $u_a(t) = u_e(t) * h(t) = \dot{u}_e(t) * a(t)$ , weil das Integral über die Impulsantwort  $h(t)$  die Sprungantwort  $a(t)$  ist.

<sup>5</sup>Alternativ wählt man bei gegebener Bandbreite die Datenrate entsprechend.

Diese Abschätzformeln werden in der Praxis häufig verwendet. Für die Grenzfrequenz  $\omega_c$  muß dabei die *mittlere Grenzfrequenz*  $\omega_m$  bzw. die 3 dB Grenzfrequenz eingesetzt werden. Die bei dieser theoretischen Überlegung gefundenen Zusammenhänge können zur überschlagsmäßigen Beurteilung von praktischen Systemen herangezogen werden.

## 2 Linearphasige TP-Systeme mit Amplitudenverzerrungen

### 2.1 Die mittlere Grenzfrequenz eines Tiefpaß-Systems

Will man die Formeln des idealen Tiefpasses auf einen praktischen Tiefpaß anwenden, so benötigt man einen geeigneten Wert für die Grenzfrequenz. Dieser Tiefpaß hat keine  $\infty$  steilen Flanken, jedoch wird eine *lineare Phase*  $\Theta(\omega) = \omega t_0$  unterstellt.

Zur Bestimmung der mittleren Grenzfrequenz  $\omega_m$  bildet man das zu der Durchlaßkurve des Tiefpaß-Systems flächengleiche Rechteck, Bild 2.1.

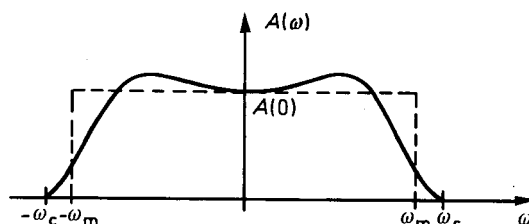


Bild 2.1: Zur Definition der mittleren Grenzfrequenz eines Tiefpaß-Systems

Aus der Figur Bild 2.1 liest man ab:

$$A(0) \cdot 2\omega_m = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) d\omega \quad \leadsto \quad \omega_m = \frac{1}{2A_0} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) d\omega \quad (2.1)$$

Diese Definition stimmt überein mit derjenigen für den idealen Tiefpaß. Es gilt für *linearphasige Systeme*:

$$h_{max} = h(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) d\omega = \left. \frac{d a(t)}{dt} \right|_{max} \quad (2.2)$$

Mit der Rampen-Näherung für die Sprungantwort  $a(t)$  folgt dann

$$\frac{a(\infty)}{t_r} = \frac{A(0)}{t_r} = h_{max} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) d\omega \quad (2.3)$$

Aufgelöst nach der Anstiegszeit  $t_r$  ergibt sich:

$$t_r = \frac{2\pi A(0)}{\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) d\omega} \quad (2.4)$$

Mit  $t_r = \pi/\omega_m$  wird schließlich die mittlere Grenzfrequenz  $\omega_m$  zu:

$$\omega_m = \frac{\pi}{t_r} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) d\omega}{2A(0)} \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) d\omega \quad \text{Fläche unter der Durchlaßkurve} \quad (2.5)$$

In der Praxis läßt sich für eine überschlagsmäßige Bestimmung der mittleren Grenzfrequenz  $\omega_m$  auch die **3 dB Grenzfrequenz** ansetzen. Wie man aus der Herleitung der Anstiegszeit  $t_r$  entnehmen kann, ist der so erhaltene Wert stets ein *unterer Grenzwert* für die tatsächliche Anstiegszeit.



## 2.2 Die äquivalente Leistungsbandbreite

Die äquivalente Grenzfrequenz  $\omega_N = 2\pi \cdot B_N$  für die Leistung (Leistungsbandbreite) ist diejenige Grenzfrequenz eines idealen Systems, das die gleiche Leistung übertragen kann, wie das vorliegende System, Bild 2.2.

Die Leistungsbandbreite ist identisch mit der *äquivalenten Rauschbandbreite* eines Übertragungs-Systems. Sie ist definiert als<sup>1</sup>

$$\omega_N = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}{2|H(0)|^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}{2A(0)^2} \quad (2.6)$$

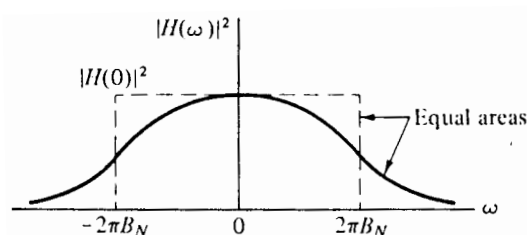


Bild 2.2: Zur Definition der Leistungsbandbreite

Für steilflankige Systeme ist die Leistungsbandbreite näherungsweise gleich der 3 dB Bandbreite. Bei Systemen mit geringer Flankensteilheit ist die Leistungsbandbreite größer als die 3 dB Bandbreite. So ist z.B. die Leistungsbandbreite eines LC-Schwingkreises

$$B_N = \frac{\pi}{2} B_{3\text{dB}} = \frac{\pi f_0}{2Q} \quad (2.7)$$

wobei  $Q = \omega_0 L/R = \omega_0 C/G$  die Güte des Schwingkreises ist.

## 2.3 Darstellung der allgemeinen Amplitudenverzerrung mit Hilfe von idealen Tiefpaß-Systemen

Da der Amplitudengang  $A(\omega)$  gerade in  $\omega$  ist und sich von  $-\omega_c$  bis  $+\omega_c$  erstrecken soll, Bilder 2.1 und 2.3, kann man sich diesen mathematisch periodisch fortgesetzt denken und dann in eine Fourier-Reihe entwickeln, in welcher nur cos-Terme auftreten.

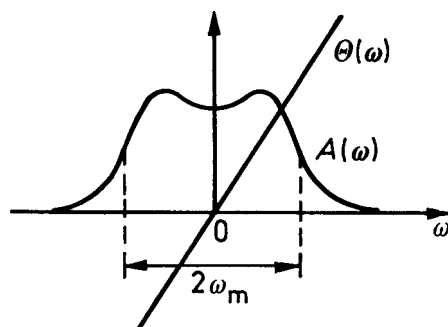


Bild 2.3: Die Übertragungsfunktion eines Tiefpasses mit Amplitudenverzerrung und linearer Phase

<sup>1</sup>Die Herleitung der Formel Gl.(2.6) erfolgt mit Hilfe der Korrelationsfunktionen. Die Definition für die Leistungsbandbreite gilt entsprechend für Bandpaß-Systeme.

Die Fourier-Zerlegung liefert:

$$A(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi\omega}{\omega_c} \quad \text{für } |\omega| < \omega_c \quad (2.8)$$

Die Größe der Koeffizienten ist dabei:

$$A_n = \frac{2}{\omega_c} \int_0^{\omega_c} A(\omega) \cos \frac{n\pi\omega}{\omega_c} d\omega \quad (2.9)$$

### 2.4 Tiefpässe mit cos-förmiger Amplitudenverzerrung

Die Auswirkung einer Amplitudenverzerrung auf die Impulsantwort  $h(t)$  und die Sprungantwort  $a(t)$  sieht man besonders deutlich, wenn man eine cosinusförmige Amplitudenverzerrung unterstellt. Bild 2.4 zeigt einen derartigen Amplitudengang.<sup>2</sup>

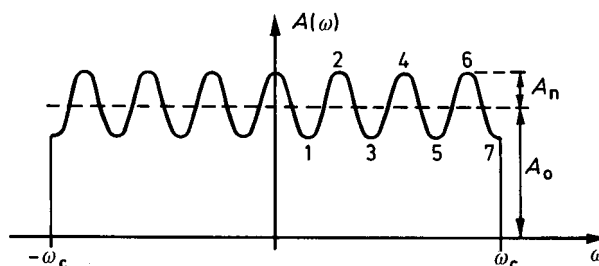


Bild 2.4: Amplitudengang eines Tiefpasses mit cosinusförmiger Verzerrung

$$A(\omega) = \begin{cases} A_0 + A_n \cos \frac{n\pi\omega}{\omega_c} & \text{für } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{für } |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (2.10)$$

Der Amplitudengang  $A(\omega)$  besteht also aus einem idealen Tiefpaß der Höhe  $A_0$  und der Breite  $\pm\omega_c$ , sowie aus einem cos-Burst gleicher Breite.<sup>3</sup> Wird der Cosinus mittels der Euler-Formel als  $(e^{+jx} + e^{-jx})/2$  geschrieben, läßt sich der in Bild 2.4 dargestellte TP als Parallel-Schaltung von 3 idealen Tiefpässen mit unterschiedlicher Laufzeit darstellen, Bild 2.5.

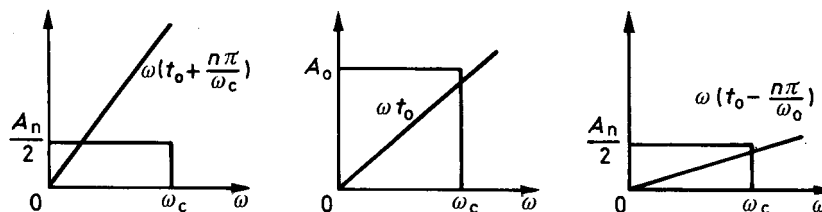


Bild 2.5: Tiefpaß mit Cos-förmiger Amplitudenverzerrung als Parallelschaltung aus 3 idealen Tiefpässen (einseitige Darstellung) mit unterschiedlicher Phase

Gemäß dem Zeitverschiebungs-Satz entspricht der Multiplikation mit einer cos-Funktion  $\cos \frac{n\pi}{\omega_c} \omega$  im Frequenzbereich hier im Zeitbereich eine Verschiebung der Impulsantwort um je  $+\frac{n\pi}{\omega_c}$  bzw.  $-\frac{n\pi}{\omega_c}$ . Auf diese Weise entstehen **Echos in der Impulsantwort** des Systems, Bild 2.6. Die Echos haben eine **gerade Symmetrie** bezüglich (der Laufzeit  $t_0$ ) des Hauptimpulses der Impulsantwort.

- Die **Entfernung der Echos** vom Hauptimpuls ist  $n \cdot \frac{\pi}{\omega_c}$ . Den Wert  $n$  erhält man dabei ganz einfach durch **Auszählen der Extrema**, wie in Bild 2.4 dargestellt ist; hier ist  $n = 7$ .

<sup>2</sup>Die Verallgemeinerung davon gemäß Gleichung (2.8) führt auf eine FIR-Struktur (finite impulse response).

<sup>3</sup>Ein Burst ist ein Rechteck, welches mit einer cos-Schwingung multipliziert ist, vergleiche A\_FT 40, Kapitel 3.2.4.

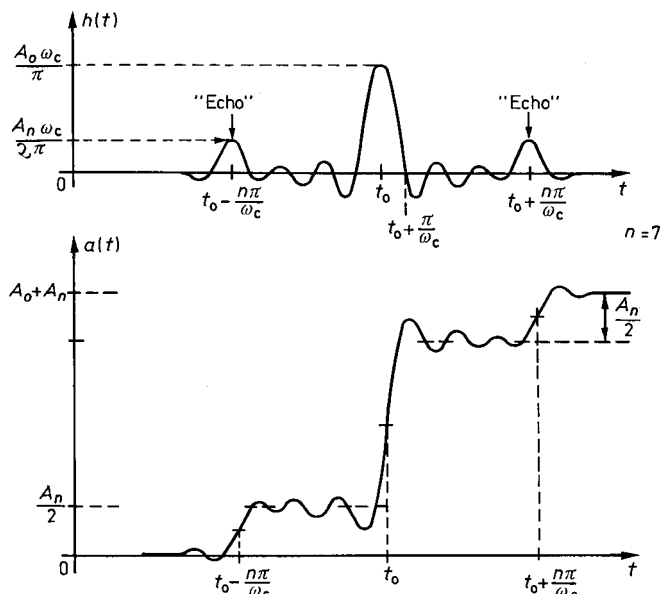


Bild 2.6: Impulsantwort  $h(t)$  und Sprungantwort  $a(t)$  eines Tiefpaß-Systems mit Cos-förmiger Amplitudenverzerrung.  $h(t)$  hat Echos und  $a(t)$  hat Stufen. Der Abstand von  $t_0$  ist  $\pm \frac{n\pi}{\omega_c}$  mit  $n = 7$  entsprechend zu Bild 2.4.

Das Vorzeichen der Echos stimmt überein mit dem Verlauf der Durchlaßkurve  $A(\omega)$  für  $\omega \approx 0$ , d.h. ist bei  $\omega = 0$  der Wert  $A(\omega) > A_0$ , so sind die Echos positiv, vergleiche Bilder 2.4 und 2.6. Also kann man als Merkgel sagen:

- Amplitudengang  $A(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} \doteq \dots \cap \dots \rightsquigarrow$  Impulsantwort :  $\cap \dots \cap \dots \cap$
- Amplitudengang  $A(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} \doteq \dots \cup \dots \rightsquigarrow$  Impulsantwort :  $\cup \dots \cap \dots \cup$

Daraus erkennt man, daß es für ein digitales Übertragungssystem (für Datenpulse) offensichtlich günstig ist, wenn der Amplitudengang  $A(\omega)$  zu höheren Frequenzen hin abnimmt, die Dämpfung also steigt mit der Frequenz, Bild 2.7.

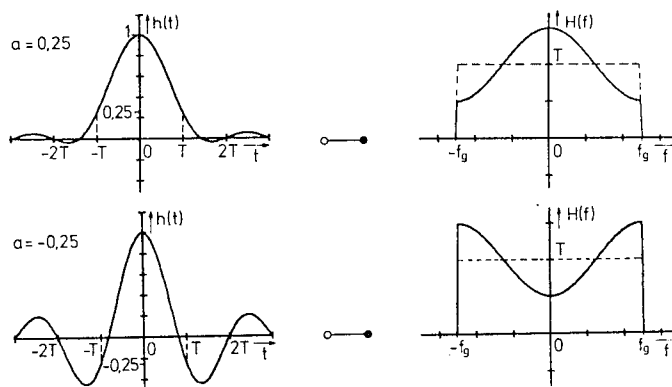


Bild 2.7: Vergleich der Impulsantworten von Systemen mit steigender bzw. fallender Dämpfung mit der Frequenz

Ein besonders günstiger Fall eines Übertragungssystems für Datenimpulse ist der  $\cos^2$ -Verlauf des Amplitudengangs, Bild 2.8.

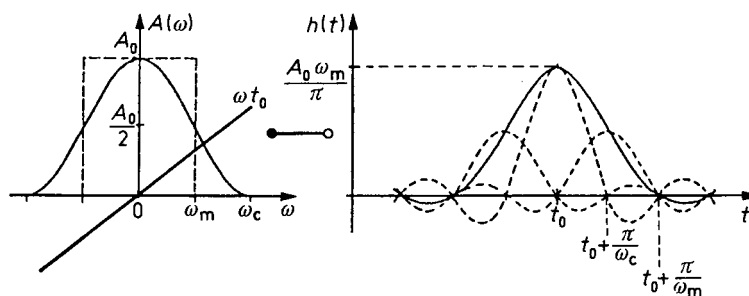


Bild 2.8: Der  $\cos^2$ -Tiefpaß und seine Impulsantwort. Die Echos – gestrichelt gezeichnet – ergeben zusammen mit dem Hauptimpuls eine besonders glatte Impulsantwort.

### 2.5 Der Gauß-Tiefpaß

Der Gauß-Tiefpaß mit linearer Phase spielt in der Technik eine wichtige Rolle, da er sich verhältnismäßig leicht approximieren läßt. Mathematisch zeichnet sich die Gauß-Funktion dadurch aus, daß sie *invariant bezüglich der Fouriertransformation* ist, d. h. in diesem Fall, daß ein Gauß-Tiefpaß eine gauß-förmige Impulsantwort hat, Bild 2.9. (Siehe hierzu auch: A\_FT 74 ff. Abschnitt 4.10.7 und A\_FT 76 Abschnitt 4.10.9)

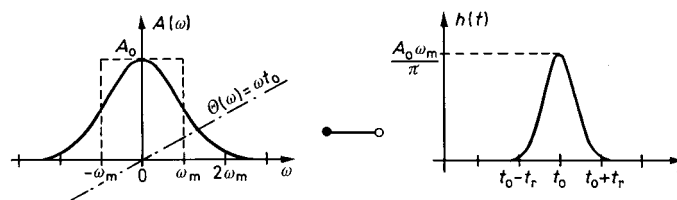


Bild 2.9: Der Gauß-Tiefpaß mit Impulsantwort  $h(t)$

Die Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  des Gauß-Tiefpasses lautet:

$$H(\omega) = \underbrace{A_0 \cdot e^{-\pi\left(\frac{\omega}{2\omega_m}\right)^2}}_{\text{Gauß-Glocke}} \cdot \underbrace{e^{-j\omega t_0}}_{\text{lin. Phase}} = A(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} \tag{2.11}$$

Hierbei ist  $\omega_m$  die mittlere Grenzfrequenz.

Die **Impulsantwort**  $h(t)$  hat ebenfalls eine Gauß-Form (siehe A\_FT 76):

$$h(t) = \frac{A_0\omega_m}{\pi} \cdot e^{-\pi\left(\frac{t-t_0}{2t_m}\right)^2} \tag{2.12}$$

Hierbei ist  $t_m$  die mittlere Breite der Impulsantwort  $h(t)$ .

Die **Sprungantwort**  $a(t)$ , Bild 2.10, wird gemäß Gleichung (1.10) indem Gleichung (2.12) eingesetzt wird:

$$a(t) = \frac{A_0}{2} + \frac{A_0 \cdot \omega_m}{\pi} \int_0^{t-t_0} e^{-\pi\left(\frac{\tau}{2t_m}\right)^2} d\tau = \frac{A_0}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}(t-t_0)}{t_r}\right) \right\} \tag{2.13}$$

In Gleichung (2.13) ist  $\operatorname{erf}(z)$  die Gauß'sche Fehlerfunktion.<sup>4</sup>

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx \quad \text{Gauß'sche Fehlerfunktion} \tag{2.14}$$

<sup>4</sup>Die Gauß'sche Fehlerfunktion spielt in der *Digitalen Übertragungstechnik* eine große Rolle, wo man mit ihrer Hilfe die Bitfehlerwahrscheinlichkeit einer digitalen Übertragung angibt, welche durch additives weißes Gauß'sches Rauschen (AWGN: additive white Gaussian noise) gestört ist.

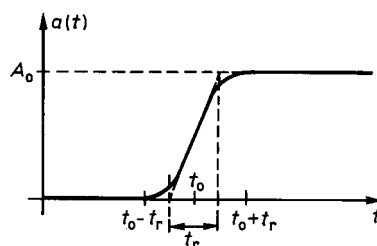


Bild 2.10: Die Sprungantwort des Gauß Tiefpasses

### 2.5.1 Mittlere Breite der Impulsantwort und Anstiegszeit der Sprungantwort

Für die mittlere Grenzfrequenz  $\omega_m$  des Gauß-TP und die mittlere Impulsbreite  $2 \cdot t_m$  seiner Impulsantwort gilt:

$$\boxed{\omega_m \cdot t_m = \frac{\pi}{2}} \quad (2.15)$$

Die Anstiegszeit  $t_r$  der Sprungantwort beträgt:

$$t_r = 2 \cdot t_m = \frac{\pi}{\omega_m} \quad (2.16)$$

Dies ist auch die mittlere Breite der Impulsantwort  $h(t)$ , so daß damit folgt:

$$h(t) = \frac{A_0}{t_r} \cdot e^{-\pi \left(\frac{t-t_0}{t_r}\right)^2} \quad (2.17)$$

Die **meßtechnisch** erfaßbare Anstiegszeit  $t_a$ , definiert von 10% — 90% der Höhe der Sprungantwort, beträgt:

$$t_a \approx 1.022 t_r \quad (2.18)$$

Bei einer Kettenschaltung von mehreren Gauß Tiefpässen errechnet sich die gesamte Anstiegszeit zu

$$\boxed{t_r = \sqrt{t_{r1}^2 + t_{r2}^2 + t_{r3}^2 + \dots}} \quad (2.19)$$

### 2.5.2 Mittlere Grenzfrequenz und 3 dB Grenzfrequenz

Bei der mittleren Grenzfrequenz  $\omega_m$  hat der Amplitudengang den Wert:

$$A(\omega_m) = A_0 \cdot e^{-\pi/4} = 0.456 A_0 \quad (2.20)$$

Beim Gauß-TP ist der Amplitudengang bei  $\omega_m$  auf 45,59% (– 6.8 dB) abgesunken. Für die **3 dB Grenzfrequenz** gilt:

$$A(\omega_{3dB}) = \frac{A_0}{\sqrt{2}} = A_0 \cdot e^{-\pi \left(\frac{\omega_{3dB}}{2\omega_m}\right)^2} = A_0 \cdot \exp\left(-\pi \left(\frac{\omega_{3dB}}{2\omega_m}\right)^2\right) \quad (2.21)$$

Aufgelöst ergibt sich daraus:

$$\boxed{\frac{\omega_{3dB}}{\omega_m} = 2 \sqrt{\frac{\log_2(\sqrt{2})}{\pi}} \approx \frac{1}{1.5054} = 0.664} \quad (2.22)$$

- Die mittlere Grenzfrequenz  $\omega_m$  des Gauß-TP ist also um  $\approx 1.5$  größer als die 3 dB Grenzfrequenz  $\omega_{3dB}$ .

### 2.5.3 Technische Anwendung: Vertikal-Verstärker des Oszilloskops

Die technische Bedeutung des Gauß-Tiefpasses liegt darin begründet, daß seine Impulsantwort und seine Sprungantwort keinerlei Überschwinger aufweisen. So ist z.B. der Vertikalverstärker im Oszilloskop als Gauß-Tiefpaß ausgelegt, damit man insbesondere Anstiegsflanken sauber, d.h. ohne meßtechnisch bedingte Überschwinger (Klingeln), messen kann.

Ein Oszilloskop hat deswegen für eine 3 dB Grenzfrequenz  $\omega_{3dB}$  eine Anstiegszeit  $t_r$  gemäß:

$$t_r = \frac{\pi}{\omega_m} \approx \frac{\pi}{1.5 \cdot \omega_{3dB}} = \frac{1}{3 \cdot f_{3dB}} \tag{2.23}$$

### 2.5.4 Datenverrundung mit Gauß-TP

Bei der Übertragung von rechteckförmigen Datenimpulsen über einen Gauß-TP haben die Ausgangssignale ebenfalls keine Überschwinger. Für die notwendige Anstiegszeit (bzw. Bandbreite) bei gegebener Dauer  $T$  der Datenimpulse gelten die gleichen Verhältnisse ( $T/t_r = 2$ ), die sich auch beim idealen TP ergeben haben, Bild 2.11.

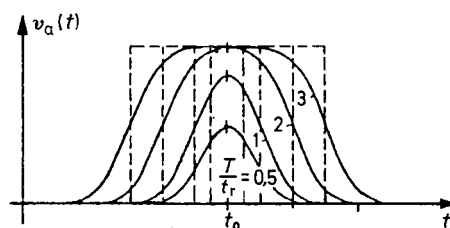


Bild 2.11: Impuls-Formung durch einen Gauß Tiefpaß. Optimal ist  $T/t_r = 2$ .

Gauß-Tiefpässe mit einer Anstiegszeit  $t_r = T/2$  bezogen auf die Dauer  $T$  der rechteckförmigen Datenimpulse sind daher für eine Verrundung gut geeignet.

## 3 Tiefpaß-Systeme mit Phasenverzerrung

Da hier der Einfluß einer Phasenverzerrung untersucht werden soll, wird als Amplitudengang des Tiefpasses angenommen, daß dieser eine Gauß-Form hat. Da diese Form keine Echos in der Impulsantwort hat, ist damit sichergestellt, daß alle nunmehr auftretenden Echos auf die Phasenverzerrung zurückzuführen sind.

### 3.1 Gauß-Tiefpaß-Systeme mit Phasenverzerrung

Es wird hierbei angenommen, daß die Abweichung vom linearen Phasenverlauf  $\omega t_0$  sehr gering sein soll, so daß man die Abweichung  $\Delta\theta(\omega)$  betrachten kann, Bild 3.1.

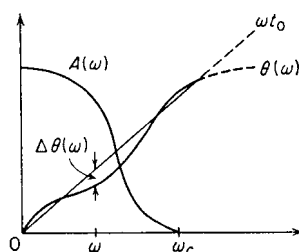


Bild 3.1: Tiefpaß-System mit geringer Phasenverzerrung

$$\Delta\theta(\omega) = \theta(\omega) - \omega t_0 \ll 1, \quad |\omega| < \omega_c \tag{3.1}$$

Für die Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  folgt damit:

$$H(\omega) = A(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} \cdot e^{-j\Delta\Theta(\omega)} \quad (3.2)$$

Wegen der Voraussetzung Gleichung (3.1) kann die Reihenentwicklung

$$e^{-j\Delta\Theta(\omega)} \simeq 1 - j\Delta\Theta(\omega) \dots \quad (3.3)$$

nach dem 1. Term abgebrochen werden. Damit läßt sich die Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  Gleichung (3.2) mit Hilfe von Gauß-Tiefpässen mit linearer Phase  $H_G(\omega)$  darstellen.

$$H(\omega) \simeq A(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} [1 - j\Delta\Theta(\omega)] = H_G(\omega) \cdot [1 - j\Delta\Theta(\omega)] \quad (3.4)$$

Da die Phase eine *ungerade Funktion* der Frequenz  $\omega$  ist, führt eine Fourierentwicklung auf eine Darstellung mit sin-Termen. Also kann angesetzt werden:

$$\Delta\Theta(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi\omega}{\omega_c} \quad (3.5)$$

$$B_n = \frac{2}{\omega_c} \int_0^{\omega_c} \Delta\Theta(\omega) \sin \frac{n\pi\omega}{\omega_c} d\omega \quad (3.6)$$

### 3.1.1 Sinusförmige Phasenverzerrung

Bei diesem Fall tritt nur ein  $B_n$  in Gleichung (3.5) auf. Wie im Fall der Amplitudenverzerrung hat die Impulsantwort  $h(t)$  wieder 2 Echos, die diesmal aber **punktsymmetrisch** bezüglich dem Zeitpunkt  $t_0$  des Hauptmaximums sind, wie Bild 3.2 für den Fall  $B_n < 0$  zeigt. Für  $B_n > 0$  drehen sich die Vorzeichen der Echos um.

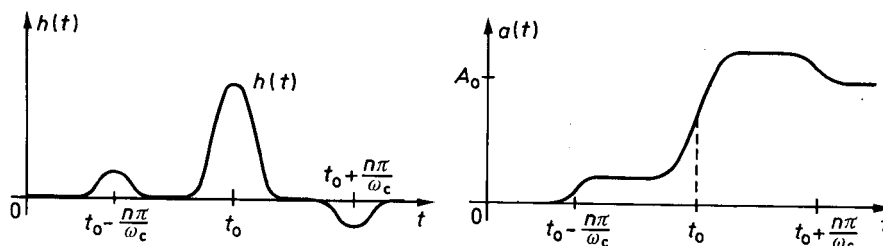


Bild 3.2: Impulsantwort  $h(t)$  und Sprungantwort  $a(t)$  eines Tiefpaßsystems mit Phasenverzerrung

## 3.2 Systeme mit Amplituden- und Phasenverzerrungen

In praktischen Systemen kommen Amplituden- und Phasenverzerrungen immer gemeinsam vor. Bild 3.3 (Seite 14) zeigt deren Auswirkung auf die Impulsantwort und die Sprungantwort.

## Literatur

- [1] Rudolph, D.: Kapitel 1 – 4 (ex. 4.3) in Bergmann: *Lehrbuch der Fernmeldetechnik*, Schiele & Schön, 5. A. 1986
- [2] Lüke, H. D.: *Signal-Übertragung*, Springer, 5. A. 1992
- [3] Papoulis, A.: *The Fourier Integral and its Applications*, McGraw Hill, 1962
- [4] Küpfmüller, K.: *Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung*, S. Hirzel, Stuttgart, 3. A. 1968, ergänzter Nachdruck der 2. A. 1952

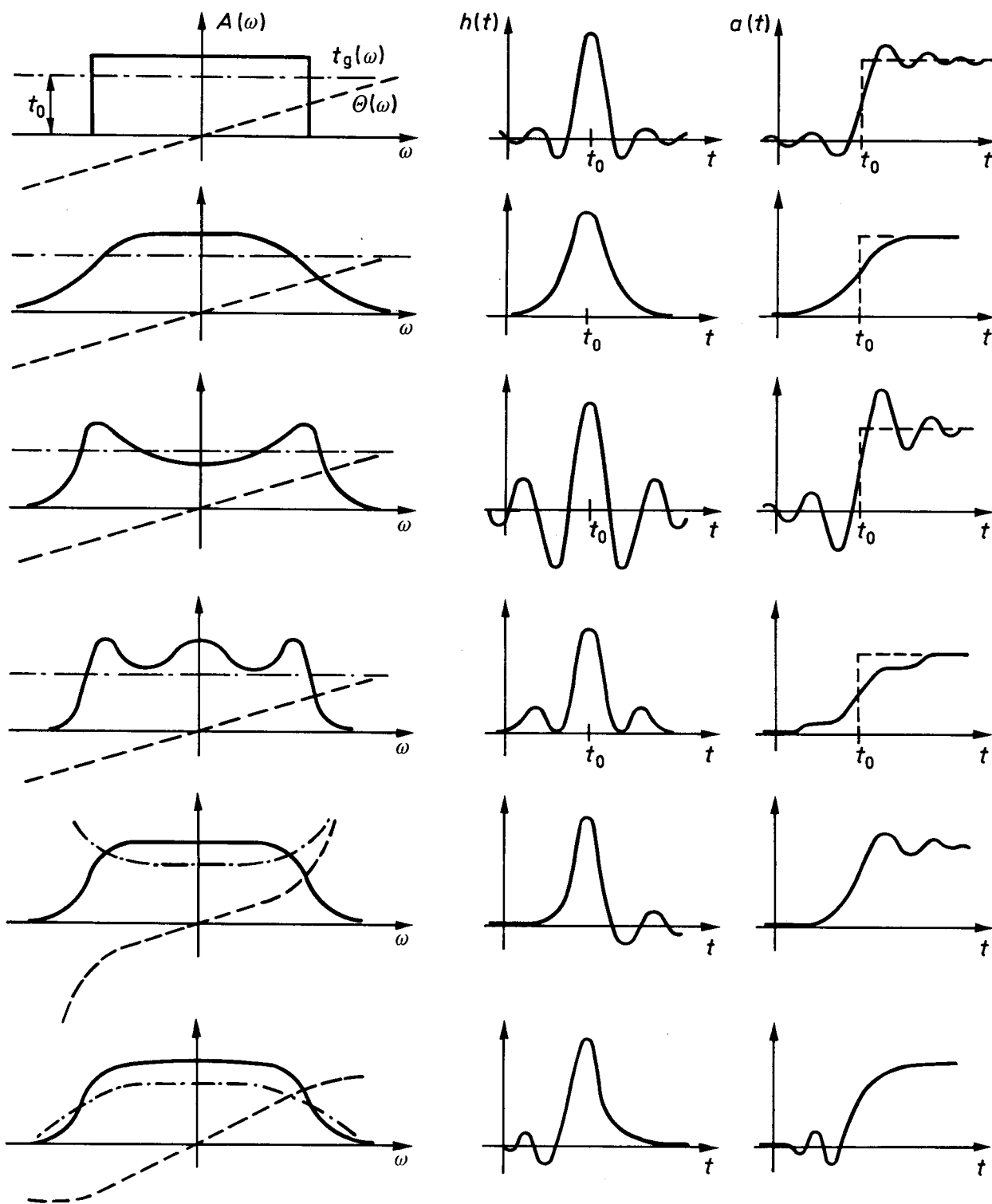


Bild 3.3: Grundsätzliche Auswirkung von Amplituden- und Phasengang bzw. Gruppenlaufzeit auf die Impuls- und Sprungantwort