

Einführung in die Signal- und System-Theorie

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| 1 Übertragungs-Systeme | 1 |
| 1.1 Verzerrungsfreies System | 2 |
| 1.2 System-Architekturen und -Hierarchien | 3 |
| 1.3 Übertragungs-System mit Störung im Kanal | 4 |
| 2 Signal-Arten | 5 |
| 3 Die Nachricht | 6 |
| 3.1 Diskreter Kanal | 6 |
| 3.2 Informationsgehalt, Entropie, Redundanz, Relevanz | 7 |
| 3.2.1 Statistische Unabhängigkeit der Symbole | 7 |
| 3.2.2 Informationsgehalt | 7 |
| 3.2.3 Entropie | 7 |
| 3.2.4 Entscheidungsgehalt | 7 |
| 3.2.5 Redundanz | 8 |
| 3.2.6 Relevanz | 8 |
| 3.2.7 Klassifizierung der Nachrichten | 8 |
| 4 Nachricht und Störung | 9 |
| 4.1 Kanal-Kapazität bei digitaler Übertragung | 9 |
| 4.1.1 Spektrale Leistungs-Dichte des Thermischen Rauschens | 9 |
| 4.1.2 Die Kanal-Kapazität | 10 |
| 4.1.3 Bandbreiten-Störungs-Verhältnis | 11 |
| 4.1.4 Shannon-Grenze für beliebige Bandbreiten | 12 |
| 4.2 Die Dynamik des Kanals | 13 |
| 4.2.1 Der Nachrichten-Quader | 13 |
| 5 Test-Signale, Elementar-Signale | 14 |
| 5.1 Harmonische Signale | 14 |
| 5.2 Sprungfunktion $\sigma(t)$ | 15 |
| 5.3 Impulse, δ -Impuls $\delta(t)$ | 15 |
| 5.3.1 Beziehung zwischen $\delta(t)$ und $\sigma(t)$ | 15 |
| 5.4 Weitere Impuls-Formen | 15 |
| 6 Zufalls-Signale | 16 |
| 7 Basisband-Signale \iff Bandpaß-Signale | 16 |
| 8 Systemdefinition über Ein- und Ausgangsgröße | 17 |
| 8.1 Vergleich von Netzwerk- und System-Theorie | 17 |

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Beispiel eines Übertragungssystems: Rundfunkversorgung per Satellit | 1 |
| 1.2 | Blockschaltbild eines Übertragungssystems | 2 |
| 1.3 | Übertragung durch ein verzerrungsfreies Übertragungssystem | 2 |
| 1.4 | Verlustlose Leitung als ideales Übertragungs-System | 2 |
| 1.5 | Die Schichten einer Übertragung zur Definition des Kanals | 3 |
| 1.6 | Das OSI Schichten-Modell einer Übertragung | 3 |
| 1.7 | Übertragungs-System mit Störung im Kanal | 4 |
| 1.8 | Störung durch Rauschen bei analoger und digitaler Übertragung | 4 |
| 2.1 | Wert-kontinuierliches Zeit-kontinuierliches & diskretes Signal | 5 |
| 2.2 | Wert-diskretes, Zeit-kontinuierliches & Zeit-diskretes Signal (analog zum Vergleich) | 5 |
| 2.3 | Oszillogramm von Sprache als Beispiel für ein stochastisches Signal | 6 |
| 3.1 | Zeit-diskreter Kanal; $t(t)$ und $r(t)$ sind analoge (!) Zeitfunktionen. | 6 |
| 3.2 | Zeit-diskreter Kanal mit Quell- und Kanal-Codierung/Decodierung | 7 |
| 3.3 | Die Teile der Nachrichten | 8 |
| 4.1 | Amplituden-Dichte-Funktion von Gauß'schem Rauschen | 10 |
| 4.2 | Shannon-Grenz-Kurve | 12 |
| 4.3 | Der Nachrichten-Quader | 13 |
| 5.1 | Testsignale für Übertragungs-Systeme | 14 |
| 5.2 | Zusammensetzung eines Rechteck-Impulses aus Sprungfunktionen | 15 |
| 5.3 | Zusammenhang von $\delta(t)$ und $\sigma(t)$ | 16 |
| 7.1 | Beispiel für Spektren von Basisband- und Bandpaß-Signalen: Farbsignale beim analogen PAL Fernsehen | 17 |
| 8.1 | Beispiel zur Netzwerkanalyse (TP System) | 18 |
| 8.2 | Beispiel zur systemtheoretischen Betrachtungsweise (TP System) | 18 |

Einführung in die Signal- und System-Theorie

In diesem Kurs werden die Grundlagen der Übertragungssysteme und der Signale behandelt. Um dabei ein Maximum an Anschaulichkeit zu erreichen, geschieht dies vorwiegend mit Hilfe **graphischer Methoden**, also mit einem Minimum an Formeln, ohne daß allerdings die Exaktheit dadurch verloren geht. Daneben wird gezeigt, wie man die Theorie in die moderne Technik umsetzt.

- Das **Verständnis** der (theoretischen) **Zusammenhänge** und der Prozeß des Umsetzens, d.h. die **praktische Anwendung der Theorie**, sind das Ziel dieses Kurses.

Wir werden also vorwiegend die „Software“ und in geringerem Maße die Hardware der Übertragungssysteme behandeln, da sich letztere je nach dem Stand der Technik ändert. Augenblicklich rechnet man mit einer **Halbwertszeit des technischen Wissens** von ca. 3 bis 5 Jahren.

Die Vorlesung soll somit eine Basis schaffen von der aus ein Ingenieur künftige neue Entwicklungen verstehen, beurteilen und beherrschen kann.

1 Übertragungs-Systeme

Ein Übertragungssystem ist das Bindeglied zwischen einer Nachrichten-Quelle Q_N und einer Nachrichten-Senke S_N . Solche Systeme können sehr komplex sein und ihrerseits selbst wieder aus einer Anzahl von Teil-Systemen bestehen, Bild 1.1 [1]. In diesem Beispiel ist die Nachrichtenquelle dem Studio zuzuordnen und die Nachrichtensenke z.B. einem Heimempfänger bzw. der davor befindlichen Person.

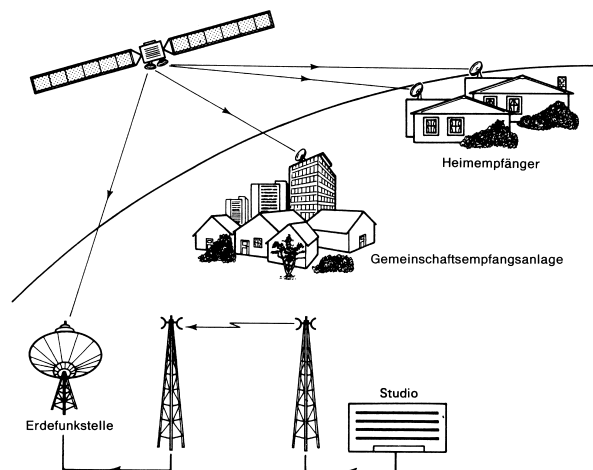


Bild 1.1: Beispiel eines Übertragungssystems: Rundfunkversorgung per Satellit

Um ein solches Übertragungssystem analysieren zu können, ist es notwendig, dieses in seine **Teil-Systeme aufzuspalten** und von jedem dieser Teile ein **mathematisches Modell** zu bilden. Man geht dabei so vor, daß in einem ersten Schritt diese Modelle so einfach gehalten werden, wie es geht. Im weiteren Verlauf werden die Modelle dann verfeinert, bis damit die **Realität mit ausreichender Genauigkeit beschrieben** werden kann.

Die Vorgehensweise bei der Modellbildung kann auf zweierlei Arten erfolgen:^{1.1}

- Beschreibung der Teilsysteme mit den Methoden der Theorie für elektrische Netzwerke (komplexe Rechnung, Vierpol- und Filter-Theorie, elektromagnetische Theorie etc.)
- **Definition des gewünschten Übertragungsverhaltens** und daraus abgeleitet die dafür erforderlichen Eigenschaften des Systems im Zeit- und Frequenz-Bereich (systemtheoretischer Ansatz) und im weiteren Verlauf die sich (aktuell) daraus ergebenden Realisierungsmöglichkeiten.

In der Vorlesung „Signale und Systeme“ werden wir den zweiten Weg betrachten. Dieser hat den Vorteil, daß er weitestgehend unabhängig von der aktuellen Realisierung eines Systems seine Gültigkeit beibehält.

^{1.1}Siehe hierzu auch Abschnitt 8 „Systemdefinition über Ein- und Ausgangsgröße“ (Seite 17)

1.1 Verzerrungsfreies System

Als Forderung an ein Übertragungssystem soll die Verzerrungsfreiheit gestellt werden. Zunächst wird das System so weit vereinfacht dargestellt, wie Bild 1.2 dies an einem Blockschaltbild zeigt.

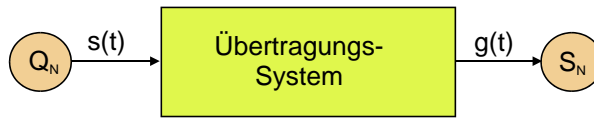


Bild 1.2: Blockschaltbild eines Übertragungssystems

$s(t)$ ist der Zeitverlauf der Information (s : Signal, z.B. eine Spannung). $g(t)$ ist der Zeitverlauf der übertragenen (und damit i.a. veränderten, fehlerhaften) Information ($g(t)$: vom Empfänger „geschätztes“ Signal). Da das Ziel darin besteht, Information unverfälscht zu übertragen, muß für die Zeitverläufe gelten:

$$g(t) = K \cdot s(t - \tau_0) \quad \text{verzerrungsfreie Übertragung} \quad (1.1)$$

$s(t)$ ist hier eine **beliebige Zeitfunktion**, K ist eine Konstante, z. B. ein Verstärkungsfaktor und τ_0 die Laufzeit des Signals durch das System. Bild 1.3 zeigt ein Beispiel für die Übertragung einer (beliebigen) Zeitfunktion durch ein solches verzerrungsfreies System. (In Bild 1.3 ist $K = 1$ gewählt.)

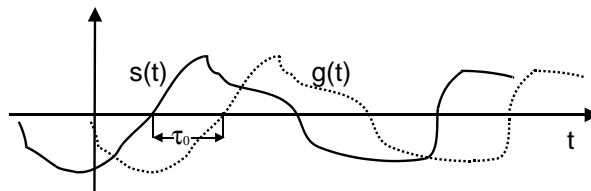


Bild 1.3: Übertragung durch ein verzerrungsfreies Übertragungssystem

Ein System mit den Eigenschaften von Gleichung (1.1) heißt **verzerrungsfrei**. Diese ideale Eigenschaft ist nicht immer erreichbar und in dieser Allgemeinheit auch nicht notwendig und meist gar nicht erwünscht, denn so allgemein formuliert bedeutet Verzerrungsfreiheit, daß von der Frequenz 0 (Gleichstrom) bis zu beliebig hohen Frequenzen (Licht, Röntgenstrahlen, usw.) alles gleichmäßig gut übertragen wird. Das macht technisch keinen Sinn.

- Praktisch gibt es Verzerrungsfreiheit immer nur innerhalb eines mehr oder weniger breiten Frequenzbereiches. Entspricht dieser dem Frequenzbereich, in dem die Spektralkomponenten des Nachrichtensignals $s(t)$ auftreten, kann $s(t)$ verzerrungsfrei übertragen werden.

Ein Beispiel für ein verzerrungsfreies Übertragungssystem ist die verlustlose Leitung mit Anpassung für Ein- und Ausgang an den Wellenwiderstand Z der Leitung, Bild 1.4.

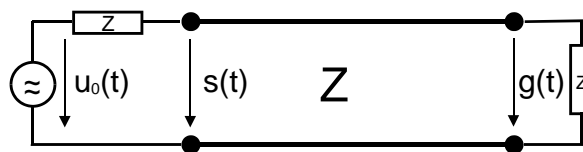


Bild 1.4: Verlustlose Leitung als ideales Übertragungssystem

Hierbei ist $u_0(t)$ die Spannung der Quelle, $s(t) = u_e(t)$ die Eingangsspannung und $g(t) = u_a(t)$ die Ausgangsspannung der Leitung. Die Laufzeit τ_0 ist proportional zur Länge der Leitung.

1.2 System-Architekturen und -Hierarchien

Übertragungs-Systeme, manchmal auch als Übertragungs-Kanäle (Channel) bezeichnet, können in der Praxis beliebig komplex sein. Je nach Aufgabenstellung werden unterschiedliche Kanäle zwischen Sende- und Empfangs-Seite definiert, Bild 1.5 [5].

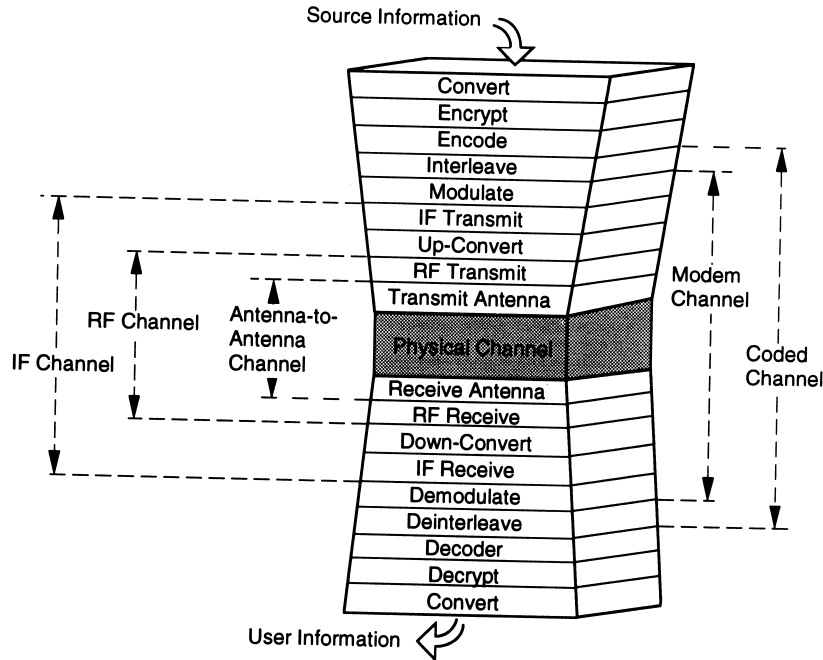


Bild 1.5: Die Schichten einer Übertragung zur Definition des Kanals

Dabei ist es üblich, mit Hilfe des OSI (*open systems interconnection*) Modells die Netzwerk-Architektur in Schichten (*Layer*) einzuteilen, Bild 1.6 [5]. Typisch ist dabei, daß jede Schicht nur ihre jeweiligen Nachbarn unten und oben „kennt“ und durch definierte **Schnittstellen** mit diesen verbunden ist. Die unteren Schichten haben den darüber liegenden Service-Funktionen zu erbringen.

Die Funktionen einer Schicht sind durch die Eigenschaften ihrer Schnittstellen definiert. Ein Austausch einer Schicht durch eine günstigere Realisierung derselben wird damit möglich. Sind die Schnittstellen definiert, können die einzelnen Schichten z.B. von unterschiedlichen Teams parallel und unabhängig von einander entwickelt werden, was heute ab Layer 2 Programmierung, also eine Software-Lösung bedeutet.

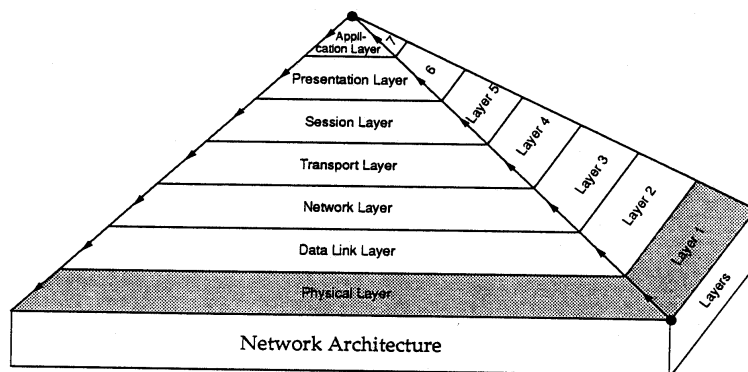


Bild 1.6: Das OSI Schichten-Modell einer Übertragung

Im Sinne des OSI Modells behandelt der Kurs „Signale und Systeme“ die Probleme der physikalischen Schicht. Es werden deshalb vorrangig analoge Signale und Systeme betrachtet.

1.3 Übertragungs-System mit Störung im Kanal

Das Übertragungs-System besteht i.a. aus einer Vielzahl einzelner Komponenten, die ihrerseits auch als Übertragungs-Systeme aufgefaßt werden können. Einen ersten Schritt hierzu zeigt Bild 1.7, wo das Gesamt-System in die Teil-Systeme Sender, (physikalischer) Kanal, Empfänger aufgespalten ist.

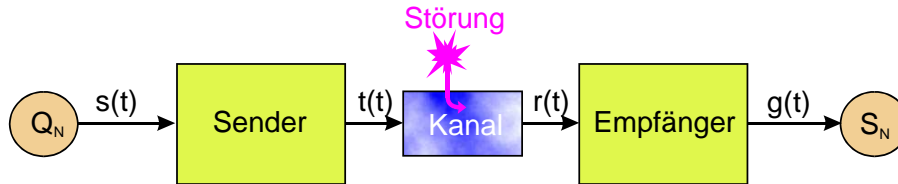


Bild 1.7: Übertragungs-System mit Störung im Kanal

Das Bild 1.7 zeigt das Eindringen von Störungen in den Übertragungs-Kanal. Dies hat übertragungstechnisch wichtige Konsequenzen, da mit allen nur denkbaren „Tricks“ versucht werden muß, die Störung im Empfangssignal $g(t)$ zu minimieren.

Die Störungen, die bei einer Übertragung auf die Nachricht einwirken können, sind beispielsweise folgende.

- lineare Verzerrungen (frequenzabhängige Verzerrungen von Amplitude, Phase und Laufzeit; Bandbegrenzungen)
- nichtlineare Verzerrungen (Aussteuerungs-abhängige Signalverformungen)
- regellose Störsignale (Rauschen, Knacken, Prasseln)
- „Übersprechen“ von Nachbarkanälen
- Störung durch Mehrwegeausbreitung und Echos (Delay-Spread im Funkkanal)
- Doppler-Spread (d.h. Doppler-Verschiebungen des Empfangssignals bei Funkübertragung infolge Bewegung von Sender und/oder Empfänger und/oder Reflektoren)

Der allergrößte Teil des technischen Aufwandes bei einer Übertragung dient einzig und alleine der Beseitigung bzw. Minimierung der Störeinflüsse auf das im Empfänger zurückgewonnene „geschätzte“ Signal $g(t)$.

Beispiele für Störungen durch (weißes) Rauschen (AWGN: *additive white Gaussian noise*) sind in Bild 1.8 dargestellt.

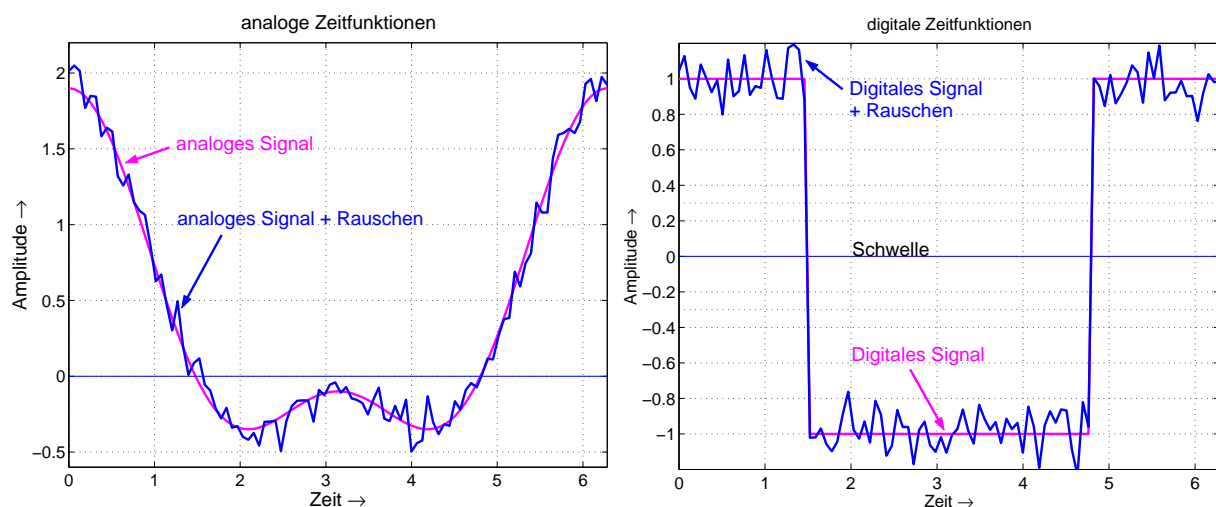


Bild 1.8: Störung durch Rauschen bei analoger und digitaler Übertragung

Das Eingangs-Signal für den Kanal ist $t(t)$. Das Ausgangs-Signal des Kanals ist $r(t)$.

- $t(t)$ und $r(t)$ sind immer **analoge Zeitverläufe (!)** mit analoger bzw. digitaler Information.

Deutlich erkennbar ist, daß digitale Signalformen weniger störanfällig sind, Bild 1.8 rechts.

Durch die empfangsseitige Signal-Schätzung kommen bei digitalen Übertragungen die Fehler (Symbolfehler, Bitfehler) zustande, wenn infolge der (Größe der) Störung ein Schätzfehler entsteht.

Ein Fehler entsteht immer dann, wenn die Störung so groß wird, daß die Schwelle dadurch überschritten (bzw. unterschritten) wird. Bei **digitaler Übertragung** ist eine vergleichsweise große Störung zulässig.

Gegen Störungen im Kanal ist man bei **analoger** Übertragung weitestgehend machtlos. Ausnahmen davon sind solche Übertragungsverfahren, die eine **erhöhte Bandbreite** verwenden, wie z.B. die Winkelmodulationen.

2 Signal-Arten

Signale können folgende Eigenschaften aufweisen:

- Zeit-kontinuierlich \iff Zeit-diskret
- Wert-kontinuierlich \iff Wert-diskret
- deterministisch (vorhersagbar) \iff stochastisch (zufällig, im Detail nicht vorhersagbar)

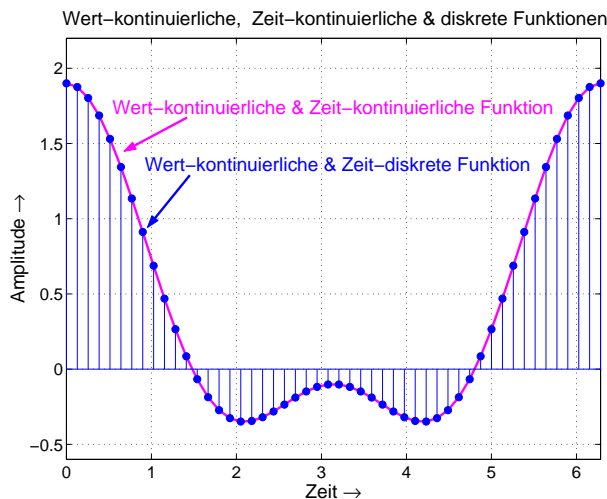


Bild 2.1: Wert-kontinuierliches Zeit-kontinuierliches & diskretes Signal

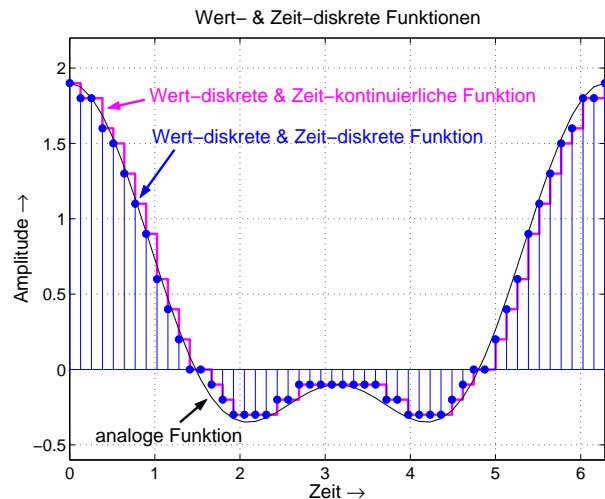


Bild 2.2: Wert-diskretes, Zeit-kontinuierliches & Zeit-diskretes Signal (analog zum Vergleich)

Die Bilder 2.1 und 2.2 zeigen die Kombinationen:

- Zeit- und Wert-kontinuierlich (**analog**) & Zeit-diskret, Wert-kontinuierlich (*discrete time*)^{2.1}
- Zeit-kontinuierlich, Wert-diskret & Zeit- und Wert-diskret (**digital**)^{2.2}

Der in den Bildern 2.1 und 2.2 gezeigte Verlauf ist ein Ausschnitt einer harmonischen Schwingung (2 Cosinus-Schwingungen mit Gleichanteil) und gehört demnach zu einem **deterministischen Signal**. Bei deterministischen Signalen ist der weitere Verlauf bekannt, d.h. (durch eine Formel) vorbestimmt. Bei periodischen Signalen ist es ausreichend, wenn man eine einzelne Periode kennt. Folglich wird damit auch im Weiteren keine (neue) Information übertragen.

Signale, die Information übertragen, sind **stochastisch** (nicht vorausbestimmbar). Ein solches Beispiel ist in Bild 2.3 [9] dargestellt. Es handelt sich dabei um ein Oszillogramm von Sprache. Zur digitalen Verarbeitung derselben wird dieses analoge Signal ebenfalls Zeit- und Werte-mäßig diskretisiert.

^{2.1}Diese Art von Signalen wird in sehr vielen Büchern zur **Digitalen Signalverarbeitung** vorrangig betrachtet: „Discrete Time Signal Processing“ statt „Digital Signal Processing“. Die eigentliche Digitalisierung ist tatsächlich mehr oder weniger nur ein „add on“ zur „Discrete Time Signal Processing“ und behandelt die bei der Quantisierung entstehenden nichtlinearen Effekte.

^{2.2}Eine spezielle Form des Digitalsignals ist das Binär-Signal, bei welchem nur 2 Amplitudenstufen auftreten.

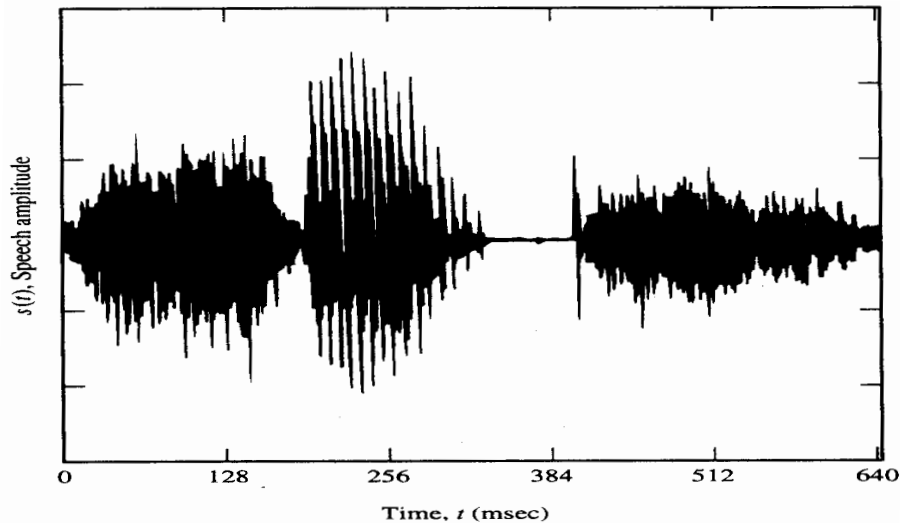


Bild 2.3: Oszillogramm von Sprache als Beispiel für ein stochastisches Signal

3 Die Nachricht

Eine Nachricht ist eine Zusammenstellung von Zeichen oder Zuständen zur Informationsübermittlung. Da man nur bei digitaler Übertragung die Störungen durch den Übertragungskanal wirkungsvoll bekämpfen kann, werden in diesem Kapitel hauptsächlich digitale Übertragungen betrachtet.

Die mathematische Theorie der Nachrichtenübertragung (Informationstheorie) versteht unter dem Begriff „Nachricht“ eine Folge von nicht deterministischen Ereignissen im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

- Eine Nachrichtenübertragung setzt eine „Verabredung“ (Code, Alphabet) zwischen Quelle und Senke voraus.

Für Quellen mit diskretem Wertebereich (Zeit-diskret, Wert-diskret: digitale Symbole) wird nur noch die Nummer des digitalen Symbols übertragen. Der Empfänger kennt diese Zuordnung zwischen Symbolen und Nummern, wodurch er die übertragene Nachricht decodieren kann.

- Die Aufgabe des Digitalen Empfängers besteht also darin, die empfangenen (verzerrten und/oder gestörten) Symbole zu **erkennen** und die korrekten Bit-Kombinationen zuzuordnen.

3.1 Diskreter Kanal

Wie man aus den Bildern 2.1 und 2.2 qualitativ erkennen kann, lassen sich die analogen Signale $s(t)$ und $g(t)$ aus den Zeit-diskreten Stützwerten $s(kT_A)$ bzw. $g(kT_A)$ wieder gewinnen.^{3.1} T_A ist die Abtast-Periode. Es genügt daher offensichtlich, wenn nur diese Stützwerte übertragen werden, die vereinfachend dann mit $s(k) = s_k$ bzw. $g(k) = g_k$ bezeichnet werden, Bild 3.1. s_k und g_k werden dann auch als „Zeit-Folgen“ bezeichnet.

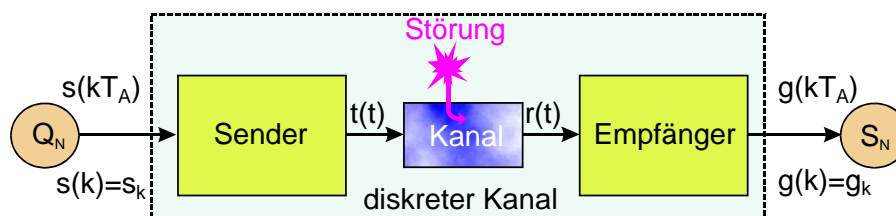


Bild 3.1: Zeit-diskreter Kanal; $t(t)$ und $r(t)$ sind analoge (!) Zeitfunktionen.

^{3.1}Dies ist die Aussage des **Abtast-Theorems**, das im Kapitel 5 der „Anwendungen der Fourier-Transformation“ behandelt wird. Als „Daumenwert“ für die maximal zulässige Länge der Abtast-Periode T_A kann angenommen werden, daß die prinzipielle Form der Zeitfunktion noch erkennbar sein muß, wenn die Stütz-Werte durch Geraden verbunden werden (Polygon-Interpolation).

3.2 Informationsgehalt, Entropie, Redundanz, Relevanz

Im Folgenden sei eine Quelle Q_N mit dem Alphabet $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_N\}$ angenommen. Das Alphabet S besteht im Beispiel aus der Anzahl N aller zulässigen Längen der \cdot . Das Symbol s_i aus S werde mit der Wahrscheinlichkeit $P(s_i)$ ausgewählt.

Es wird im weiteren vorausgesetzt, daß die Quelle stationär sei, d.h. ihre (statistischen) Eigenschaften sich zeitlich nicht ändern. Weiterhin soll die Quelle als „gedächtnislos“ angenommen werden, was bedeutet, daß die (aktuell) ausgewählten Quellsymbole nicht von den zuvor ausgewählten abhängig sind.^{3.2}

3.2.1 Statistische Unabhängigkeit der Symbole

Die Längen der \cdot in den Bildern 2.1 und 2.2 sind ganz augenscheinlich nicht statistisch von einander unabhängig.

Damit die statistische Unabhängigkeit der Symbole s_{kck} (im Zeit-diskreten Kanal) tatsächlich erreicht wird, muß zwischen der Quelle (Q_N) und dem Zeit-diskreten Kanal (DK) noch eine Codierung erfolgen, bestehend aus Quell-Codierung (QC) und Kanal-Codierung (KC), die empfangsseitig wieder decodiert werden muß (KD, QD). Man erhält damit ein Blockschaltbild gemäß Bild 3.2. (Man vergleiche hiermit die Darstellung in Bild 1.5, Seite 3. Welche Zuordnungen können getroffen werden?)

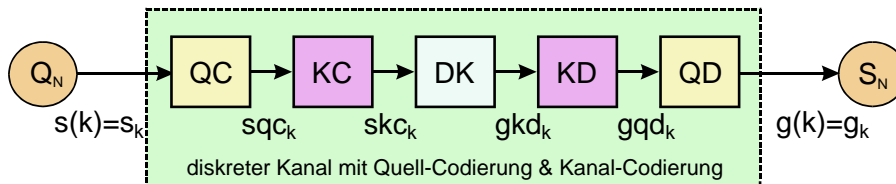


Bild 3.2: Zeit-diskreter Kanal mit Quell- und Kanal-Codierung/Decodierung; QC: Quell-Codierung, KC: Kanal-Codierung; DK: Zeit-diskreter Kanal; KD: Kanal-Decodierung; QD: Quell-Decodierung

Die prinzipielle Bedeutung von Quell-Codierung (QC) und Kanal-Codierung (KC: Fehlerschutz-Codierung) geht aus den folgenden Überlegungen hervor.

3.2.2 Informationsgehalt

Der Informationsgehalt $I(s_i)$ eines ausgewählten Quellsymbols ist (unter obiger Voraussetzung, daß das Symbol s_i mit der **Wahrscheinlichkeit** $P(s_i)$ ausgewählt wird):

$$I(s_i) = \lg_2 \frac{1}{P(s_i)} = -\lg_2 P(s_i) \quad \text{Informationsgehalt} \quad \text{bit/Symbol} \quad (3.1)$$

- Ein selten ausgewähltes Symbol hat also einen größeren Informationsgehalt (Überraschungswert).

3.2.3 Entropie

Der **mittlere Informationsgehalt** aller N Quellsymbole ist die **Entropie** H der Quelle.

$$H(S) = \sum_{i=1}^N P(s_i) I(s_i) = -\sum_{i=1}^N P(s_i) \lg_2 P(s_i) \quad \text{Entropie} \quad \text{bit/Symbol} \quad (3.2)$$

3.2.4 Entscheidungsgehalt

Maximale Entropie H_0 hat eine Quelle, wenn alle Symbole mit **gleicher Wahrscheinlichkeit** $P(s_i) = 1/N$ auftreten.

$$H_0 = \lg_2 N \quad \text{Entscheidungsgehalt} \quad \text{bit/Symbol} \quad (3.3)$$

^{3.2}Eine sehr gute Einführung in diese Problemstellung findet sich in [3].

- Der Entscheidungsgehalt H_0 entspricht der **Anzahl von Bits**, die zur Numerierung der Quellsymbole verwendet werden.

Im Unterschied dazu kann die **Entropie** H als die Anzahl von Bits gedeutet werden, die **im Mittel** zur Numerierung benötigt werden. Hierbei ist angenommen, daß die Quellsymbole in Abhängigkeit von ihrer Wahrscheinlichkeit P codiert sind.^{3.3}

3.2.5 Redundanz

Eine Nachricht mit dem **Entscheidungsgehalt** H_0 setzt sich zusammen aus ihrem **mittleren Informationsgehalt** (Entropie) H und einer **Redundanz** R_z .

$$H_0 = H + R_z \quad \text{Entscheidungsgehalt} = \text{Entropie} + \text{Redundanz} \quad (3.4)$$

Hier ist zwischen natürlicher und hinzugefügter Redundanz zu unterscheiden.

Während die **natürliche** Redundanz weitestgehend als **unsystematisch** bezeichnet werden kann, fügt man z.B. zum Zwecke des **Fehlerschutzes** einer Nachricht **systematische Redundanz** hinzu, mit deren Hilfe auch bei fehlerhafter Übertragung die Information fehlerfrei zurück gewonnen werden kann (**Kanal-Codierung, Fehlerschutz-Codierung**).

3.2.6 Relevanz

Hier ist zwischen **erkennbarer** und **nicht erkennbarer** Relevanz zu unterscheiden.

Dieser Unterschied bezieht sich insbesondere auf die Fähigkeit der Nachrichten-Senke (Auge, Ohr) solche Unterschiede wahrzunehmen.

- Dies wird weitestgehend bei den Kompressionsverfahren (Quellen-Codierung) für Video, Bild, Audio usw. ausgenutzt mit dem Ziel der Reduzierung der Speichergröße bzw. der zu übertragenden Datenrate. Kompressionsverfahren dieser Art werden als „**verlustbehaftet**“ bezeichnet. Die originalen Daten können nicht wieder hergestellt werden.

Zum Zwecke der Verminderung der Datenmenge (bei einer Übertragung z.B. zwischen Computern) werden Codes verwendet, die die natürliche Redundanz (der Files) minimieren, wie z.B. das Zip Programm. Dieses ist ein „**verlustloses**“ **Kompressionsverfahren**, da sich beim „ent-zippen“ die ursprüngliche Nachricht wieder herstellen läßt.

3.2.7 Klassifizierung der Nachrichten

Eine Nachricht enthält i.a. Teile folgender Art:

- relevant (zur Sache gehörend)
- irrelevant (nicht zur Sache gehörend)
- nicht redundant (unbekannt, neu)
- redundant (bekannt, wiederholt)

Dies läßt sich graphisch in einem Koordinatensystem darstellen, Bild 3.3 [4].

Interessant sind nur Nachrichten, die relevant und nicht redundant sind.

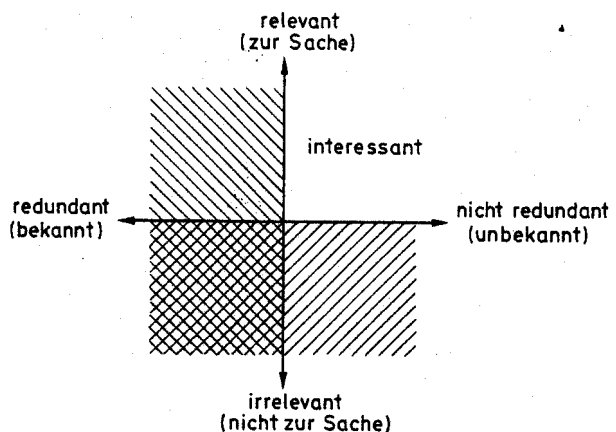


Bild 3.3: Die Teile der Nachrichten

^{3.3}Ein Beispiel dazu ist der Huffman Code.

4 Nachricht und Störung

Der Entscheidungsgehalt H_0 einer Nachricht läßt sich nicht beliebig groß machen, denn im (physikalischen) Übertragungskanal kommt eine Störung hinzu, siehe Bild 1.7 (Seite 4). Damit wird:

$$H_0 = \begin{cases} \lg_2(\sqrt{1 + P_S/P_n}) & \text{für analoge Signale} \\ \lg_2(N) & \text{für digitale Signale} \end{cases} \quad (4.1)$$

Bei einer **analogen Übertragung** (physikalischer Kanal, Signale $t(t)$ und $r(t)$, Bilder 1.7 und 3.1) hängt der Entscheidungsgehalt H_0 der Nachricht von der Signal–Leistung P_S und der Stör–Leistung P_n (Geräusch–Leistung) ab.

Bei einer **digitalen Übertragung** (Zeit–diskreter Kanal [mit Quell–Codierung und Kanal–Codierung], Signale s_{kck} und g_{kck} , Bild 3.2) hängt der Entscheidungsgehalt H_0 von der Anzahl N der verwendeten Symbole ab.^{4.1}

4.1 Kanal–Kapazität bei digitaler Übertragung

Shannon [2] hat einen quantitativen Zusammenhang angegeben zwischen dem fehlerfrei in einem gestörten Kanal übertragbaren Entscheidungsgehalt H_0 und der Größe der Störung im Kanal. Dabei ist als Störung **normalverteiltes weißes Rauschen** (AWGN *Additive White Gaussian Noise*) angenommen, welches z.B. als **thermisches Rauschen** auftritt.

- Nach Bild 1.8 (Seite 4, rechts) darf eine solche Störung bei digitaler Übertragung vergleichsweise groß sein, ohne daß es zu Fehlern führt. Das bedeutet, daß die Sendeleistung entsprechend gering gemacht werden darf. Bei digitalen Übertragungen ist deshalb das Thermische Rauschen stets relevant.

4.1.1 Spektrale Leistungs–Dichte des Thermischen Rauschens

Die **spektrale Leistungsdichte** S_n des Thermischen Rauschens ist proportional zur absoluten Temperatur T und ergibt sich (praktisch frequenz–unabhängig) zu:

$$S_n(f) = kT = N_0 \quad \text{spektrale Leistungsdichte [W/Hz]} \quad (4.2)$$

Hierbei ist:

$$k = 1,3805 \cdot 10^{-23} \quad [W_s/K = J/K] \quad \text{Boltzmann Konstante; } T \quad [K] \quad \text{absolute Temperatur}$$

Für Normal–Temperatur (17^0 C bzw. $T_0 = 290$ K) ergibt sich:

$$S_{n_0} = 4 \cdot 10^{-21} \text{ W/Hz} \quad \rightsquigarrow \quad -174,0 \text{ dBm/Hz} \quad (4.3)$$

Die spektrale Leistungsdichte des Rauschens ist gemäß Gleichung (4.2) konstant für alle Frequenzen. Das kann aus physikalischen Gründen nicht stimmen, da sich dann eine theoretisch ∞ große Rauschleistung ergäbe.

Mit Hilfe der Quanten–Mechanik ergibt sich die exakte Gleichung für das Thermische Rauschen zu:

$$S_n(f) = \frac{hf}{\exp(hf/kT) - 1} = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} \quad \text{Spektrale Leistungs–Dichte} \quad (4.4)$$

Hierbei ist:

$$h = 6,625 \cdot 10^{-34} \quad [Js] \quad \text{Planck'sches Wirkungs–Quantum}$$

Damit ist sichergestellt, daß für beliebig hohe Frequenzen das Thermische Rauschen $\rightarrow 0$ geht. Allerdings gibt es auch für diese hohen Frequenzen keine rauschfreien Bauelemente, denn dann kommt ein ein Quantenrauschen hinzu, Bild 4.1 [7].

$$S_{\text{quant}}(f) = hf \quad \text{spektrale Leistungsdichte von Quanten–Rauschen} \quad (4.5)$$

Der Übergangs–Bereich zwischen Thermischem und Quanten–Rauschen ist für $T = 2,9$ K bei 40 GHz, für $T = 29$ K bei 400 GHz und für $T = T_0 = 290$ K bei 4000 GHz = 4 THz (fernes Infra–Rot).

^{4.1}Z.B. 64QAM, Quadratur Amplituden–Modulation mit 64 Symbolen (Amplituden/Phasen–Zuständen)

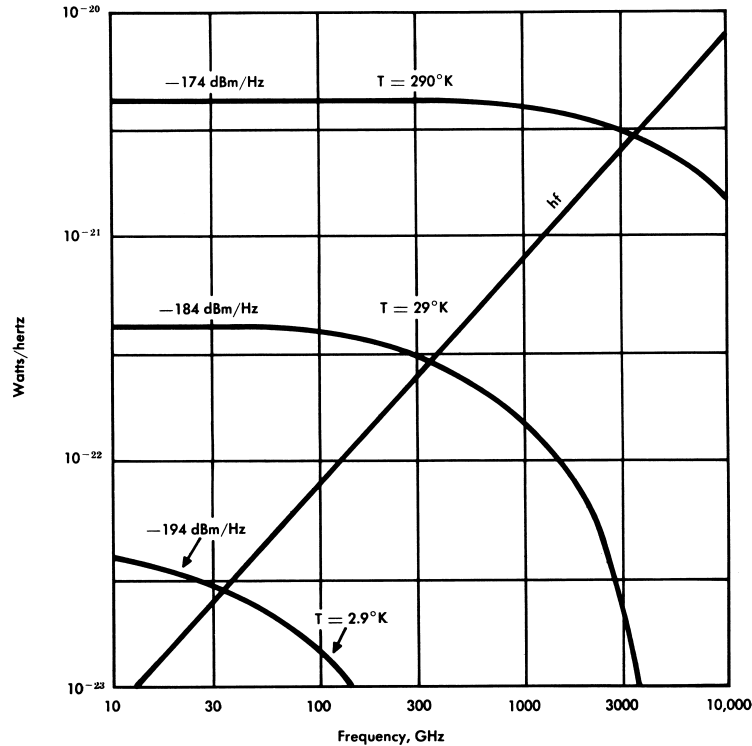


Bild 4.1: Amplituden-Dichte-Funktion von Gauß'schem Rauschen

Bei elektronischen Schaltungen ist die obere Grenz-Frequenz i.a. (viel) kleiner als 4 THz. Daher kann in der Praxis mit der vereinfachten Formel Gleichung (4.2) gerechnet werden. Die Thermische **Rauschleistung** P_n innerhalb einer Bandbreite B Hz wird damit **proportional zur Bandbreite**.

$$P_n = N_0 B = kTB = kT_0 B \frac{T}{T_0} \quad \rightsquigarrow \quad p_n/\text{dBm} = -174 + 10 \log_{10}(T/T_0) + 10 \log_{10} B/\text{Hz} \quad P_n \text{ thermisch} \quad (4.6)$$

4.1.2 Die Kanal-Kapazität

Nach Shannon gilt für die Übertragungs-Kapazität C des durch **weißes Rauschen** (AWGN *Additive White Gaussian Noise*) gestörten Übertragungskanals:

$$C = B \cdot \lg_2 \left(1 + \frac{P_S}{P_n} \right) = B \cdot \lg_2 \left(\frac{P_S + P_n}{P_n} \right) \quad \text{Kanal-Kapazität} \quad \text{bit/sec} \quad (4.7)$$

Hierbei sind: C : **Kanal-Kapazität** in bit/sec P_S : **Signal-Leistung** in W
 B : **Kanal-Bandbreite** in Hz P_n : **Rausch-Leistung** in W
 Der Quotient

$$\frac{P_S}{P_n} = \text{SNR} \quad \text{Signal-zu-Geräusch-Verhältnis} \quad (4.8)$$

ist das Signal-zu-Geräusch-Verhältnis SNR (auf der Empfangs-Seite). Das SNR wird in der Praxis als dB-Wert angegeben. Damit erhält man aus Gleichung (4.7) folgende **Näherung** für die Kanal-Kapazität.

$$C \approx B \cdot \frac{\log_{10}(\text{SNR})}{\log_{10} 2} = B \cdot \frac{10 \cdot \log_{10}(\text{SNR})}{10 \cdot \log_{10} 2} \approx \frac{B}{3} \text{ SNR/dB} \quad \text{Kanal-Kapazität} \quad \text{bit/sec} \quad (4.9)$$

Mit der Beziehung

$$\lg_2(x) = \ln(x) / \ln(2) \quad (4.10)$$

ergibt sich eine alternative Schreibweise für die Kanal-Kapazität Gleichung (4.7):

$$C = 1.44 \cdot B \cdot \ln \left(1 + \frac{P_S}{P_n} \right) = 1.44 \cdot B \cdot \ln \left(\frac{P_S + P_n}{P_n} \right) \quad \text{bit/sec} \quad (4.11)$$

Die Rauschleistung P_n ist für AWGN proportional zur Bandbreite B und es gilt:

$$P_n = N_0 \cdot B \quad \text{Rauschleistung} \quad (4.12)$$

Hierbei ist $N_0 = kT$ die (einseitige) **spektrale Rauschleistungsdichte** $S_n(f)$.

Bei **digitaler Übertragung** ist es üblich, die Signal-Leistung P_S aus der **mittleren Energie pro Bit** E_b zu berechnen:

$$P_S = R \cdot E_b \quad \text{digitale Signal-Leistung} \quad (4.13)$$

Hierbei sind: R : **Datenrate** in bit/sec
 E_b : **mittlere Energie pro (übertragenem) Bit (des empfangenen Signals)** in W

Damit wird die Kanal-Kapazität aus Gleichung (4.7) bei einer Störung durch AWGN:

$$C = B \cdot \lg_2 \left(1 + \frac{E_b R}{N_0 B} \right) \quad \text{Kanal-Kapazität digital} \quad \text{bit/sec} \quad (4.14)$$

Der Quotient der (erreichbaren) Daten-Rate R zur Bandbreite B

$$\frac{R}{B} = \eta_s \quad \text{spektrale Effizienz} \quad \frac{\text{bit/sec}}{\text{Hz}} \quad (4.15)$$

ist die **spektrale Effizienz** η_s der digitalen Übertragung.

4.1.3 Bandbreiten-Störungs-Verhältnis

Rauschfreier Kanal

Aus Gleichung (4.14) sieht man sofort, daß in einem rauschfreien Kanal, d.h. für $N_0 = 0$, die Kanal-Kapazität $C \rightarrow \infty$ geht.

Dies ist sofort einzusehen, da in einem rauschfreien Kanal eine **beliebig feine** Änderung (bzw. Stufung) des Signals fehlerfrei übertragen wird und in dieser Änderung **entsprechend viel Information** enthalten sein kann. Solche idealen Verhältnisse gibt es in der Praxis leider nicht.

Interessant ist, daß der Grenzwert $C \rightarrow \infty$ hierbei nicht von der Bandbreite B abhängt.

Kanal mit ∞ großer Bandbreite

Erhöht man die Bandbreite B bis $B \rightarrow \infty$, so folgt aus Gleichung (4.14) durch Erweiterung, wobei $E_b R = P_S$ (Signal-Energie) gesetzt ist:

$$\begin{aligned} C &= \frac{P_S}{N_0} \cdot \left[\frac{N_0 B}{P_S} \lg_2 \left(1 + \frac{P_S}{N_0 B} \right) \right] \\ \leadsto C &= \frac{P_S}{N_0} \cdot \lg_2 \left(1 + \frac{P_S}{N_0 B} \right)^{\frac{N_0 B}{P_S}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Mit der Beziehung $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ wird daraus:

$$C_\infty = \lim_{B \rightarrow \infty} C = \frac{P_S}{N_0} \cdot \lg_2 e = 1.44 \frac{P_S}{N_0} = 1.44 \frac{E_b R}{N_0} \quad (4.17)$$

Würde man die Übertragungsrates R gleich der Kanalkapazität C_∞ machen (können), so ergäbe sich der (theoretische) Grenzwert von:

$$\boxed{\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{1.44} \implies -1.6 \text{ dB} \quad \text{asymptotischer Grenzwert}} \quad (4.18)$$

Bei genügender Bandbreite $B \rightarrow \infty$ ist (theoretisch) auch dann noch eine fehlerfreie Übertragung möglich, wenn das Signal vom Rauschen verdeckt wird.

- Allgemein gilt nach Shannon, daß für $R < C$ eine Übertragung mit beliebig kleiner Fehlerrate (oder beliebig hoher Zuverlässigkeit) möglich ist, wenn die Quelle (durch Codierung) geeignet an den Kanal angepaßt ist.

Shannon hat jedoch nur ausgesagt, daß es gehen muß, nicht aber wie es praktisch tatsächlich geht. Es sind heute Codiervorgahren bekannt, die der Shannon–Grenze bis auf weniger als 1/2 dB nahe kommen.

4.1.4 Shannon–Grenze für beliebige Bandbreiten

Für die Shannon–Grenze $R = C$ folgt aus Gleichung (4.14)

$$\frac{C}{B} = \cdot \lg_2 \left(1 + \frac{E_b}{N_0} \frac{C}{B} \right) \quad (4.19)$$

Aufgelöst nach dem hierfür (mindestens) notwendigen Verhältnis von Energie pro Bit zu Rauschleistungs–Dichte E_b/N_0 ergibt sich daraus:

$$\boxed{\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{C/B} - 1}{C/B} \quad \text{Shannon–Grenze}} \quad (4.20)$$

Diese Grenzkurve ist in Bild 4.2 [8] dargestellt.^{4.2}

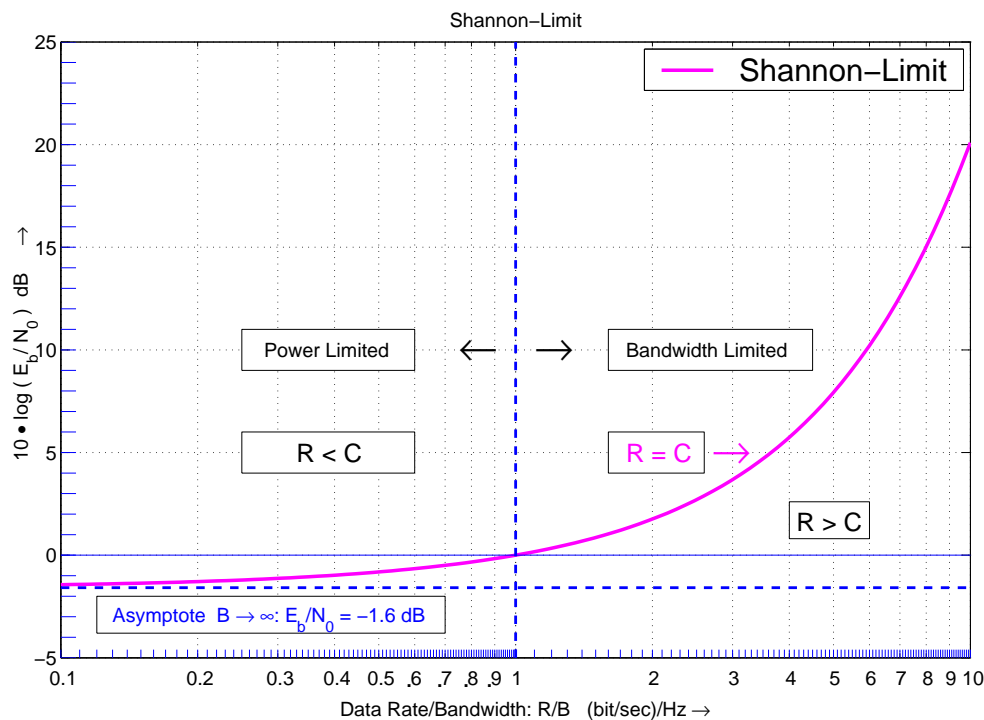


Bild 4.2: Shannon–Grenz–Kurve: Erforderliches Verhältnis von Bit–Energie zu Spektraler Rauschleistungs–Dichte E_b/N_0 als Funktion der spektralen Effizienz $\eta_s = R/B$ (Daten–Rate zu Bandbreite); nur im Bereich $R < C$ (oberhalb der Grenz–Kurve) ist eine fehlerfreie Digital–Übertragung möglich.

Für $R < C$ unterscheidet man 2 Bereiche.

^{4.2}Digitale Modulationsverfahren ohne Fehlerschutz–Codierung liegen ≈ 10 dB oberhalb der Shannon–Grenze für BER $< 10^{-5}$.

- $R/B = \eta_s > 1$: **Bandbreiten-begrenzte Übertragung** (*bandwidth limited*)

Für diese Modulationen mit größerer spektraler Effizienz $R/B = \eta_s > 1$ ist gemäß Shannon auch ein größeres Verhältnis von Signal–Leistung zu Rauschen E_b/N_0 erforderlich. Die Bandbreiten-begrenzten Übertragungen werden terrestrisch verwendet.

- $R/B = \eta_s < 1$: **Leistungs-begrenzte Übertragung** (*power limited*)

Die Leistungs-begrenzten Übertragungen werden beim Mobilfunk (UMTS), bei GPS und interstellar eingesetzt.

Im Bereich mit $R > C$ ist keine zuverlässige Übertragung möglich, unabhängig davon, welcher Codieraufwand getrieben wird.

4.2 Die Dynamik des Kanals

Aus Gleichung (4.7) (Seite 10) erhält man die Dynamik D des Kanals zu:

$$D = \frac{C}{B} = \lg_2 \left(\frac{P_S + P_n}{P_n} \right) \quad \text{Kanal-Dynamik} \quad (4.21)$$

Aus Gleichung (4.1) (Seite 9) für analoges Signal ergibt sich folgende Verknüpfung zwischen der Dynamik und dem Entscheidungsgehalt H_0 des Kanals:

$$D = 2 \lg_2 \left(\sqrt{\frac{P_S + P_n}{P_n}} \right) = 2 \cdot H_0 \quad \rightsquigarrow \quad H_0 = D/2 \quad \text{Kanal-Entscheidungsgehalt} \quad (4.22)$$

4.2.1 Der Nachrichten-Quader

Nimmt man noch die Übertragungszeit T für eine Nachrichtenübertragung hinzu, läßt sich die in der Zeit T übertragene Nachrichten-Menge als Quader darstellen, wenn für die beiden anderen Achsen die Bandbreite B und die Dynamik D bzw. der Entscheidungsgehalt H_0 gewählt werden, Bild 4.3 [4].

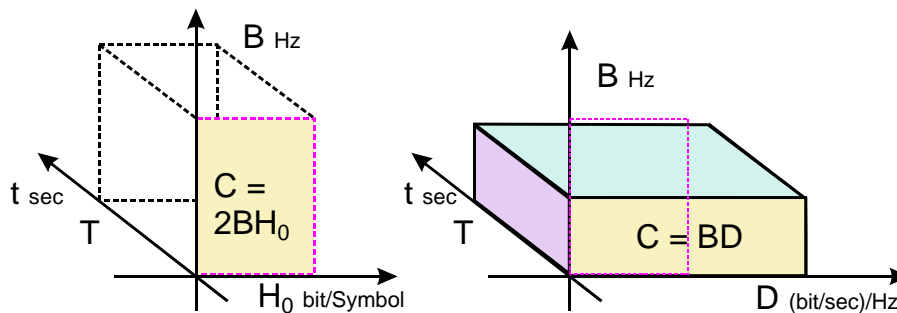


Bild 4.3: Der Nachrichten-Quader

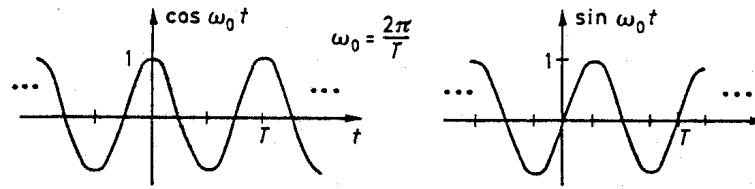
Dieses Bild, bei dem die Nachrichten-Menge durch das Volumen des Quaders dargestellt wird, soll veranschaulichen, daß sich für eine gegebene Nachrichten-Menge die Parameter T, B, D bzw. T, B, H_0 gegeneinander in ihren Werten verschieben lassen. Die volle Dynamik des Kanals kann nur mit einer **geeigneten Codierung** ausgeschöpft werden (unter Ausnutzung bis an die Shannon-Grenze).

- So läßt sich bei festem T (z.B. Echtzeit-Übertragung) die **Dynamik gegen die Bandbreite** verschieben. Die Bandbreite ändert sich z.B. durch **Modulation**. Hier gibt es entsprechende Modulationsverfahren, die eine größere Bandbreite erfordern und dafür mit einer geringeren Dynamik des Kanals auskommen, was gleichbedeutend ist mit geringerer Sendeleistung.
- Ist nicht genügend Sendeleistung verfügbar und kann die Bandbreite auch nicht weiter erhöht werden, muß die **Übertragungszeit** T verlängert werden, damit die vorgesehene Nachrichtenmenge übertragen werden kann. Entsprechende Anwendungen finden sich in der Raumfahrt.

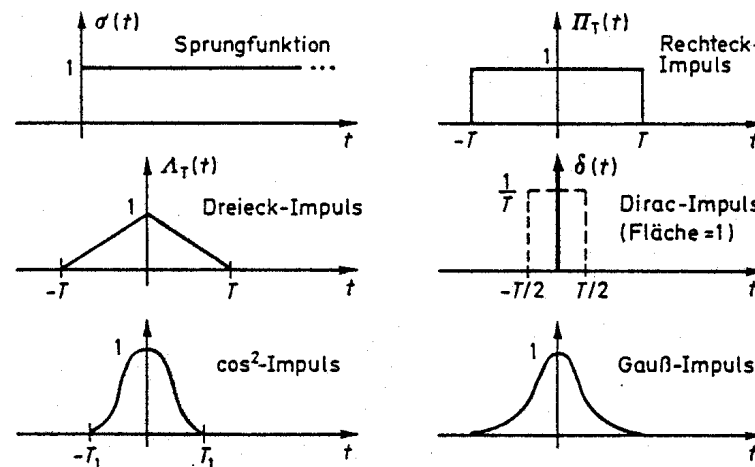
5 Test-Signale, Elementar-Signale

Da es nicht möglich ist, alle denkbaren Eingangssignale eines Systems zu untersuchen, beschränkt man sich im Sinne der Systemtheorie auf wenige einfache, aber aussagekräftige Elementarsignale, Bild 5.1 [4]. Die in diesem Bild vorgestellten Testsignale sollen nun noch charakterisiert werden.

periodische Testsignale:



unperiodische (einmalige) Testsignale:



zufällige (stochastische) Testsignale:

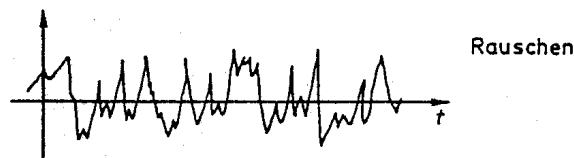


Bild 5.1: Testsignale für Übertragungs-Systeme

5.1 Harmonische Signale

Die harmonischen Signale $\sin(\omega_0 t)$ und $\cos(\omega_0 t)$ spielen bei linearen Systemen eine große Rolle, denn die

- **Eigenschwingungen von linearen Systemen** (aus konzentrierten Elementen) sind **cos-förmig**.
- Weiter gilt, daß ein **lineares** System bei **cos-förmiger Erregung** eine **cos-förmige Antwort** hat. Darauf beruht auch die gesamte **komplexe Wechselstrom-Rechnung**.

Klirrfaktoren

In der Praxis kann ein cos-förmiges Signal zur **Messung der Linearität** eines Übertragungssystems dienen. Ist das System nicht linear, ist die Ausgangsspannung nicht mehr cos-förmig. Eine spektrale Zerlegung (Fourier-Zerlegung bzw. meßtechnisch z.B. Messung mit einem Fourier-Analysator) des Ausgangs-Signals liefert dann z.B. Oberschwingungen. Die Leistung, die in diesen Oberschwingungen steckt, dient als Maß für die Nichtlinearität, die in einem solchen Fall mit Hilfe der Klirrfaktoren ausgedrückt wird. Hierzu werden die Leistungen auf den Oberschwingungen zur Leistung auf der Grundschwingung ins Verhältnis gesetzt.

5.2 Sprungfunktion $\sigma(t)$

Die Sprungfunktion $\sigma(t)$ ist die mathematische Beschreibung einer eingeschalteten Gleichspannung. Die Ausgangsgröße ist in diesem Fall die **Sprungantwort** $a(t)$ des Systems. Insbesondere in der Regelungstechnik dient die Sprungantwort zur Charakterisierung von Systemen^{5.1}.

5.3 Impulse, δ -Impuls $\delta(t)$

Der **Rechteckimpuls** $\Pi_T(t)$ ist eine in der Übertragungstechnik häufig verwendete Form. Technisch entspricht er einem (idealen) Digitalisignal. Mathematisch läßt sich der Rechteckimpuls als Differenz zweier (zeitlich gegeneinander verschobener) Sprünge darstellen, Bild 5.2.^{5.2}

$$\Pi_T(t) = \sigma(t + T) - \sigma(t - T) \tag{5.1}$$

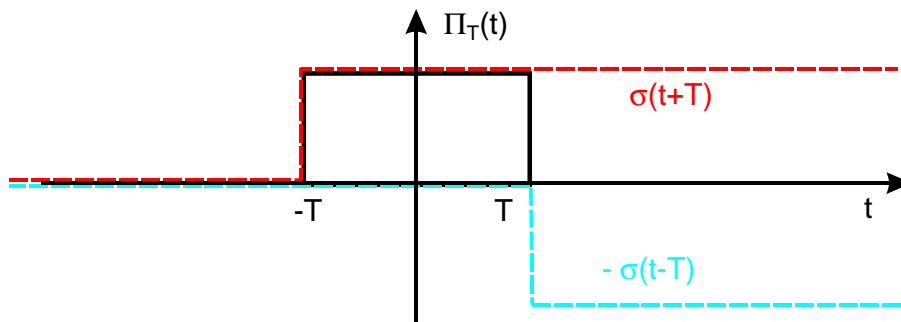


Bild 5.2: Zusammensetzung eines Rechteck-Impulses aus Sprungfunktionen

Der **Dirac-Impuls** $\delta(t)$ ist die Verallgemeinerung z.B. eines Rechteckimpulses (infinitesimal schmal, ∞ hoch, Fläche $A = 1$). Dies ist ganz allgemein die Idealisierung eines **Nadel-Impulses**. Die Antwort des Systems auf einen $\delta(t)$ -Impuls ist seine Impulsantwort $h(t)$. Wegen der Beziehung (Fourier-Transformation) zwischen der **Impulsantwort** $h(t)$ und der **Übertragungsfunktion** $H(\omega)$ wird die Impulsantwort in der Übertragungstechnik zur Charakterisierung von Systemen verwendet.

5.3.1 Beziehung zwischen $\delta(t)$ und $\sigma(t)$

Wie man aus Bild 5.1 und aus Bild 5.3 erkennt, gilt:^{5.3}

| | |
|---|-------|
| $\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}$ | (5.2) |
| $\delta(t)$ -Impuls = Ableitung des Sprunges $\sigma(t)$ | |

| | |
|--|-------|
| $\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$ | (5.3) |
| Sprung $\sigma(t)$ = Integral mit laufender oberer Grenze t über $\delta(t)$ | |

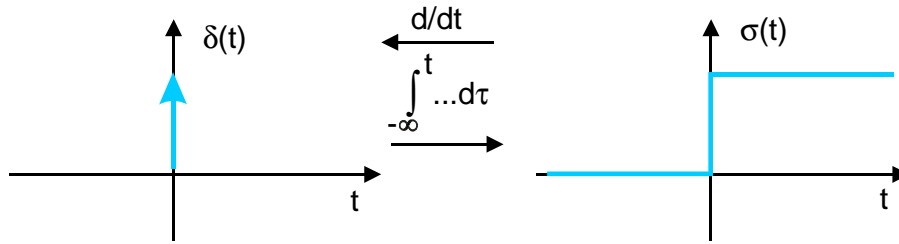
5.4 Weitere Impuls-Formen

Die Formen \cos^2 & Gauß dienen insbesondere als Verrundung von Datensignalen. Da Übertragungssysteme **praktisch immer eine begrenzte Bandbreite** haben, ist die Verrundung zur Beschränkung der Übertragungsbandbreite von Impulsen erforderlich. Für $T_1 \rightarrow 0$ führen auch diese Impulse auf einen $\delta(t)$ -Impuls.

^{5.1}Im Unterschied zum $\delta(t)$ -Impuls führt der Sprung $\sigma(t)$ als Eingangssignal i.a. nicht zu einer Übersteuerung eines Übertragungssystems.

^{5.2}Der Index T von $\Pi_T(t)$ gibt die **halbe Breite** des Rechteckimpulses an. In der Formel für seine Spektralverteilung wird T ebenfalls vorkommen.

^{5.3}Ein gleichartiger Zusammenhang besteht auch zwischen der Impuls-Antwort und der Sprung-Antwort eines Übertragungs-Systems.

Bild 5.3: Zusammenhang von $\delta(t)$ und $\sigma(t)$

6 Zufalls-Signale

In der Nachrichtentechnik treten Zufalls-Signale an folgenden Stellen in Erscheinung, nämlich als Störung, als Test-Signale und als (reale) Informations-Signale.

Störung:

Rauschen, Geräusche, Übertragungs-Schwund. Dies beeinträchtigt die Informationsübertragung über ein System. Im Grenzfall wird das Informations-Signal vom Stör-Signal verdeckt.

Test-Signal:

Rauschen, das in einem Rauschgenerator erzeugt wird, dient als **Ersatz für ein komplexes Nachrichtensignal**, weil es ähnliche statistische und spektrale Eigenschaften hat. Damit ist es möglich, Systeme unter Praxis-Bedingungen zu testen.

7 Basisband-Signale \iff Bandpaß-Signale

Werden Signale im Frequenzbereich betrachtet, gibt es zusätzlich zu den oben benannten Eigenschaften folgende Unterschiede:

Basisband-Signale: Das Spektrum dieser Signale reicht von der Frequenz 0 Hz (Gleichgröße) bis zu einer oberen Grenzfrequenz ω_g .

$$0 \leq \omega \leq \omega_g \quad (7.1)$$

In der Digitalen Signalverarbeitung sind das die üblichen Signalformen, da man hierfür mit einer *minimalen Abtastrate* auskommt.

Bandpaß-Signale: Das Spektrum dieser Signale ist konzentriert bei einer Trägerfrequenz (*carrier frequency*) Ω_C . Es handelt sich um *modulierte Signale*.

$$\Omega_C - \Delta\omega \leq \omega \leq \Omega_C + \Delta\omega \quad (7.2)$$

Diese Signale sind i.a. in ihrer **Amplitude** und ihrer **Phase** moduliert. Amplitude und Phase entsprechen einer **polaren Darstellung**.

Äquivalent dazu ist eine **kartesische Darstellung** dieser Signale, was dann auf **komplexe** Zeitsignale mit **Real- und Imaginärteil** führt. In dieser Darstellung lassen sich diese Signale in das Basisband verschieben und sind damit einer Digitalen Signalverarbeitung zugänglich.

- **Bandpaß-Signale** werden deshalb als **komplexwertige Zeitsignale** behandelt. Dies ist die in der **Digitalen Signalverarbeitung** übliche Darstellung [12].

Bild 7.1 [10] zeigt Spektren von Basisband- und Bandpaß-Signalen am Beispiel von Farbsignalen des analogen PAL Fernsehens.

Das Modulationsspektrum ist ein Basisband-Signal, während der Farbhilfsträger und die beiden Seitenbänder des modulierten Signals Bandpaß-Signale sind.

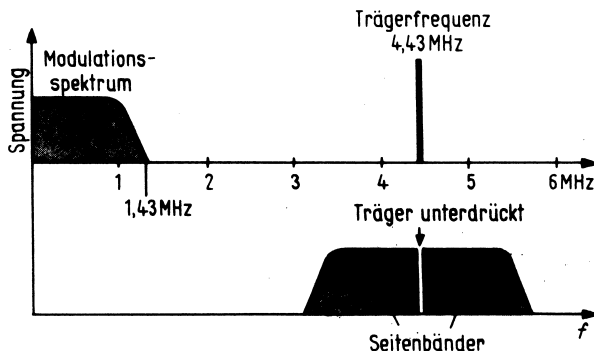


Bild 7.1: Beispiel für Spektren von Basisband- und Bandpaß-Signalen: Farbsignale beim analogen PAL Fernsehen

8 Systemdefinition über Ein- und Ausgangsgröße

Recht übersichtliche Verhältnisse ergeben sich, wenn man sich (zunächst) auf **System-Modelle** beschränkt^{8.1}. Ein System-Modell soll hier so definiert werden, daß es den (mathematischen) Zusammenhang zwischen der Eingangsgröße $s(t)$ und der Ausgangsgröße $g(t)$ des Systems beschreibt, d.h. es soll gelten:

$$g(t) = \mathcal{W}\{s(t)\} \quad (8.1)$$

- \mathcal{W} heißt Wirkung von. $g(t)$ ist die (Aus-) Wirkung von $s(t)$, wobei $s(t)$ die Ursache und $g(t)$ die Wirkung ist. \mathcal{W} ist mathematisch ein **Operator** oder eine **Transformation**.

Die Wirkung wird dabei oft idealisiert vorgegeben, wie z.B. bei „idealen“ Tiefpaß-Systemen.

Ein über seine Wirkung \mathcal{W} definiertes System-Modell wird sich nicht in jedem Fall genau so realisieren lassen. Für ein realisierbares System gelten zusätzliche physikalische Bedingungen. Zum Zwecke der überschlagsmäßigen Abschätzung verwendet man in der Praxis trotzdem nicht realisierbare System-Modelle, weil sie einfach sind und die entstehenden Fehler überschaubar bleiben.

Ein System, das nur durch seine Ein- und Ausgangsgrößen definiert wird, kann selbstverständlich die **unterschiedlichsten technischen Realisierungen** haben. Beispielsweise ist ein Radio demnach ein Übertragungssystem mit der Eingangsgröße (modulierte) Hochfrequenz und der Ausgangsgröße z.B. Musik.

Definiert man Systeme nur mit Hilfe von Ein- und Ausgangsgrößen oder Wirkungen \mathcal{W} , so kommt man zu einer Betrachtungsweise, wie sie in der Systemtheorie üblich ist. Es werden möglichst **einfache Signalformen** verwendet, damit die Zusammenhänge — und damit die mathematische Beschreibung — für das System-Modell einfach werden.

Dies führt dann (zunächst) auf ideale System-Modelle (z.B. **verzerrungsfreies System**). Die realisierbaren Systeme weichen von den idealen Modellen immer mehr oder weniger ab. Die Kunst des Ingenieurs besteht darin, ein ideales System mit Hilfe der vorhandenen Technik möglichst gut und mit minimalem Aufwand zu approximieren^{8.2}.

Das Ziel, die systemtheoretische Definition eines System-Modells möglichst einfach zu gestalten, geht oft sogar so weit, daß die Wirkung $g(t)$ bereits vor der Ursache $s(t)$ beginnt. Ein solches System ist **nicht kausal** und in Folge dessen physikalisch nicht realisierbar. Die entsprechende Definition ist jedoch als nie ganz erreichbares Ziel nützlich, da sie eine theoretische Grenze absteckt.

8.1 Vergleich von Netzwerk- und System-Theorie

In der Netzwerk-Theorie bzw. Netzwerk-Analyse ist es üblich, eine cos-förmige Erregung anzusetzen. Damit kann man mit der symbolischen Methode der Wechselstromrechnung (komplexe Rechnung) das System oder

^{8.1}Tatsächlich stellt jede mathematische Beschreibung eines Systems ein System-Modell dar. Hierbei gilt ebenfalls eine Art von „Reziprozitäts-Gesetz“: Je genauer das reale System beschrieben wird, d.h. je kleiner die Abweichungen vom realen Verhalten sind, um so aufwändiger wird der dazu notwendige Formelapparat.

^{8.2}Die Approximation (Annäherung) ist Themenstellung z.B. der Netzwerk- und Filter-Synthese. Hierfür gibt es heute verschiedene Computer gestützte Simulationsprogramme.

Netzwerk berechnen (Kirchhoff, Maschenanalyse etc.). Hieraus berechnet sich z.B. Übertragungsfunktion (Systemfunktion) $H(\omega)$.^{8,3}

$$H(\omega) = \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)} \quad \text{Übertragungsfunktion} \quad (8.2)$$

Bild 8.1 [11] zeigt ein Beispiel für ein Tiefpaß-System. Es ist zu beachten, daß sich bei angeschlossenem Lastwiderstand Z_2 eine andere Übertragungsfunktion ergibt als bei Leerlauf ($Z_2 = \infty$).

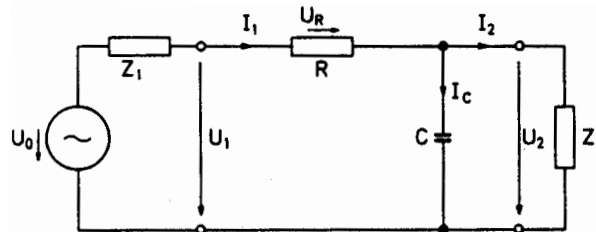


Bild 8.1: Beispiel zur Netzwerkanalyse (TP System)

In der Systemtheorie beschreibt man das gleiche System (im Zeitbereich) durch Angabe der Ausgangsgröße $g(t)$ bei gegebener Eingangsgröße $s(t)$, wobei der rechteckförmige Verlauf $s(t) = \square$ deswegen gerne gewählt wird, weil er einfach ist, Bild 8.2 [11].

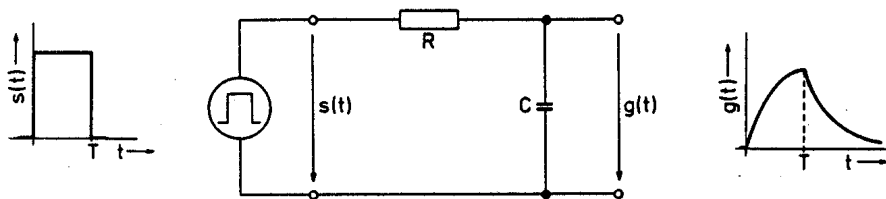


Bild 8.2: Beispiel zur systemtheoretischen Betrachtungsweise (TP System)

Mit Hilfe der Fourier-Transformation läßt sich aus einer entsprechenden Beziehung im Zeitbereich die Übertragungsfunktion $H(\omega)$ des Systems im Frequenzbereich gewinnen.

Literatur

- [1] Roddy, D.: *Satelliten-Kommunikation*, Hanser & PrenticeHall, 1991
- [2] Shannon, C. E.: *A Mathematical Theory of Communications*, Bell Syst. Tech. J., Vol. 27, (July 1948) pp. 379 – 423 & (Okt 1948) pp. 623 – 656
- [3] Lindner, J.: *Informationsübertragung; Grundlagen der Kommunikationstechnik*, Springer, 2005
- [4] Bergmann (Hrsg.): *Lehrbuch der Fernmeldetechnik*, 5.A., Bd. 1, Schiele & Schön, 1986
- [5] Simon, M. K.; Hinedi, S. M.; Lindsey, W. C.: *Digital Communication Techniques*, Prentice Hall, 1995
- [6] Hambley, A. R.: *An Introduction to Communication Systems*, Computer Science Press, 1990
- [7] o.N.: *Transmission Systems for Communications*, 4th ed. revised, Bell Telephone Laboratories, 1971
- [8] Ziemer, R. E.; Peterson, R. L.: *Introduction to Digital Communication*, McMillan, 1992
- [9] Deller, J.R.Jr.; Proakis, J.G.; Hansen, J.H.L.: *Discrete-Time Processing of Speech Signals*, McMillan, 1993
- [10] Limann, O., Pelka, H.: *Fernsehtechnik ohne Ballast*, Franzis, 1988
- [11] Ohm, J.R.; Lüke, H. D.: *Signalübertragung*, 9.A., Springer, 2004
- [12] Kammeyer, K. D.; Kroschel, K.: *Digitale Signalverarbeitung, Filterung und Spektralanalyse mit MATLAB-Übungen*, 5.A., Teubner, 2002

^{8,3}Zur Vereinfachung der formelmäßigen Beschreibung wird die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot f$ verwendet, wobei f die natürliche Frequenz ist.